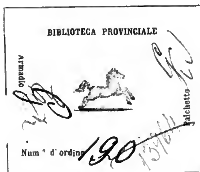



FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num° d'ordine 190


NAZIONALE
B. Prov.
I
1729
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

DELLE

SEZIONI CONICHE

LIBRI TRE.

DELLE

SEZIONI CONICHE

LIBRI TRE

DELL' ABATE

FELICE GIANNATTASIO

Professore di Sintesi Sublime nella Regia Università degli Studj di Napoli, Socio Ordinario della Reale Accademia delle Scienze, ed Onorario dell'Istituto d' Incorraggiamento, ec.









NAPOLI

Dalla Tipografia della Reale Accademia di Marina.

1819.



INDICE

DE'

CAPITOLI.





DELLE SEZIONI CONICHE

LIBRO II.

Dell' Ellisse.

DELLE SEZIONI CONICHE

LIBRO III.

Dell' Iperbole.

FINE DELL' INDICE.

ISTORIA
DELLE
SEZIONI CONICHE.



§. 1. CHiunque va speculando i progressi della Geometria de' curvilinei, ed i varj rami, che leggiadramente crebberle d' intorno, resterà sorpreso nell' osservare, come i Geometri dell' antichità rimota, e sin dalla culla della Geometria vi avessero adeguatamente conosciute le curve coniche; quasichè la scienza *de' Conici* fosse nata sì chiara e perfetta, qual n' è tra noi. Ed in vero essi vi compreser chiaramente la più semplice e la più elegante genesi che conviensi alle dette curve. Ne dimostrarono con venustà e rigore le moltiplici proprietà, che le adornano; ed in fin vi prescrissero i varj usi, che deggion farsi di queste curve nell' inventare, e massimamente nel construire i Problemi solidi, che diciamo di terzo grado, o di quarto. Ei crederà, che cotesto privilegio di conoscenza si fosse accordato alla rara sapienza degli Aristei, degli Euclidi, degli Archimedi, e degli Apollonj,

i quali furono i primi padri del retto geometrizzare: o di ciò non pago potrà credere, che lo avesser meritato coteste linee di secondo ordine, che son le curve della Natura. Imperciocchè le Parabole sone i sentieri de' corpi, che dalla terra projettansi obbliquamente: e simili ad esse sono le Orbite delle Comete, che da' rimoti spazj del Firmamento alle regioni solari fan ritorno. I Pianeti tanto primarj, che secondarj si volgono in ellittiche trajettorie. E finalmente i gnomoni fitti a squadra su piani orizzontali, o in su i pareti van descrivendo cogli estremi delle loro ombre or l' una or l'altra di quelle curve, che dal segamento del cono con un piano ricaviamo. Ma conviensi agli Eruditi l' indagare di quel mirabil fenomeno la cagione: ed io quì deggio a prò de' giovanetti intrattenermi a compiere un ragionato discorso dell' argomento.



§. 2. Aristeo Seniore (1), vetustissimo Geo-

(1) Aristeo Seniore non fu un Filosofo Platonico, come opina il Montucla *nell' Histoire des Mathemat. lib. III.* e con ciò posteriore al Divino Platone. Nè tampoco Eudosso Gnidio fu al medesimo Aristeo anteriore, come scrive Giorgio Krafft *nell' Ordine Cronologico de' Matem. Ant.* Cotesto Geometra Crotoniate fu il miglior Discepolo di Pitagora, e 'l primo di lui successore nella Scuola Italica. Archita Tarentino, che fu l' ottavo successore di Pitagora, e quindi posteriore ad Aristeo almeno per un secolo, ebbe per discepoli nel-

metra Crotoniate, e successore del gran Pitagora nella Scuola Italica, fin dall' infanzia della Geometria elementare congegnò brevi e nitide istituzioni su i Conici, dividendole in 5 libri (2). Ei ve ne aggiunse altrettanti su i *Luoghi Solidi*. E quest'opera destinata, com' io m' immagino, a comporre i Problemi di terzo, o di quarto grado (3), doveva costituire una parte essenziale di quel corso analitico, che appellavasi dagli Antichi *Luogo Risoluto* (4). Dopo di Aristeo il Divino Platone, Eudos-

---

la Geometria Platone, ed Eudosso; de' quali il primo ritrovò l' orditura dell' Analisi geometrica, e l' altro compose il V.° libro degli Elementi, ove l'arte contiensi del dimostrare. E tornerà a gloria della Magna Grecia, le cui regioni formano una parte di questo Regno, che di là sien venuti i primi semi della Geometria Sublime, e dell'arte d'inventare, e di dimostrare. *Jambl. de vita Pyth. C. ult. Stanlei. de Pyth. c. 24. Bruker. de Pyth.*

(2) Vedi Pappo Alessandrino *nella pref. al lib. 7. delle Matem. Collez.* E Viviani nella prefaz. della sua II. Divinazione geometrica su i luoghi solidi di Aristeo Seniore.

(3) I Problemi di 3.° e di 4.° grado si chiamavano dagli Antichi, Problemi *Solidi*.

(4) I Geometri, che travagliarono sul luogo risoluto, e che gittarono le fondamenta della Geometria Sublime, furono Aristeo Seniore, Euclide, Eratostene, ed Apollonio Pergeo. Onde qualora volevasi istituire un giovanetto nell' arte dell' inventare, e del di-

so Gnidio, e 'l suo Discepolo Menecmo, e forse tanti altri Geometri, le opere de' quali perirono in

---

mostrare, dopo di avergli distintamente recata la Geometria elementare, gli si facevano apprendere i libri che appartenevano al Luogo Risoluto: de' quali eccone l'ordine, e gli argomenti serbatici da Pappo nella cit. pref. e la reintegrazione di alcuni di essi fatta da' Moderni Geometri.

OPERE ANALITICHE DEGLI ANTICHI.

Euclidis data Lib. I. *Apollonii de Sectione rationis.* Lib. II.	Esistenti
	Restituiti
Apollonii de Sectione Spatii. Lib. II.	da Halley e da Willebrordo Snellio
Apollonii determinatae Sectionis Lib. II.	dallo stesso Snellio, da Giannino, e da Roberto Simson.
Apollonii Tactionum L.II.	da Francesco Vieta, da Camerer, e dal Sig. Fergola.
Euclidis Porismata. L.III.	da Pietro Fermat, e dallo stesso Simson.
Apollonii, Inclinationum. Lib. II.	da Marino Ghetaldo, e da Horsley.
Apollonii Locorum Planorum. Lib. II.	da Francesco Schooten, e da Roberto Simson.
Apollonii Conicorum Lib. VIII.	VII. esistenti; ma il V. fu anche restituito da Viviani, e l' VIII. da Halley.

un co' loro nomi, scoversero altre verità sul medesimo soggetto. E queste cose dovettero essere quel materiale, onde Euclide (5) compose i quattro libri delle sezioni coniche, e che forse lo stesso Principe de' Geometri Archimede Siracusano accolse ne' Conici, cui talora ne' suoi libri delle Sferoidi, e delle Conoidi ei si rapporta. Ma coteste opere il tempo edace le involò tutte alla posterità erudita. E niuna delle verità, che vi si contenevano, sarebbe passata ad illustrar nostra ragione, se per buona fortuna non fossero a noi pervenuti i Conici di Apollonio Pergeo, ove con bell'ordine veggonsi quelle riunite, e col rigor della Sintesi dimostrate.

§. 3. Questo Valentuomo nato in Perga Città della Panfilia 247 anni prima dell' Era volgare fu istituito da' Discepoli di Euclide in Alessandria, e divenne un Geometra quanto esteso nelle matematiche conoscenze, altrettanto ferace d' invenzioni. Ei fra le molte opere, che compose, scrisse VIII. libri su i Conici: ordinando ne' primi quattro, illu-

---

Aristaei Loca Solida. L. V.	da Vincenzo Viviani
Euclidis Locorum ad superficiem Lib. II.	. . . .
Eratosthenis de medietatibus. Lib. II.	. . . .

(5) Vedi Pappo nel giudizio, ch' ei ne reca su i Conici di Apollonio nella cit. pref.

strando, ed universalizzando ciò che gli avean trasmesso su tali curve i Geometri anteriori: ed aggiungendovi delle verità più sublimi negli ultimi quattro libri. Se i primi quattro di questi libri sieno stati quegli stessi, che avea composti Euclide sul medesimo soggetto, o se Apollonio, ch' era molto cupido di gloria, avendo involato alcuni privati manoscritti ad Archimede, gli avesse pubblicati in suo nome (6), non cale quì di esaminare. Ei farà non per tanto alta maraviglia a' Matematici l' osservare, come l' ho detto sin da principio, che da' primi tempi della Geometria si sieno distintamente comprese le linee di II°. ordine, che non ha guari si è conosciuto esser le curve della natura.

§. 4. Ma prima, ch'io vi ragioni dell' ordine, che si ravvisa ne' Conici di Apollonio, del fato di questi libri, e di altre opere prodotte a dì nostri sullo stesso assunto, non v' incresca l' intendere alcune cose sull' orditura de' metodi, coi quali conviene trattare simili materie.

§. 5. I metodi, onde si deggiono investigar le affezioni delle curve coniche per poi disporle in uno scientifico sistema, parmi esser due, uno *Diretto*, *Inverso* l' altro. Il primo consiste nel piantar le

---

(6) Gli Scrittori, che hanno ad Apollonio imputato questo plagio letterario, si furono tra gli antichi Eraclio nella vita di Archimede, e tra' moderni Guidone Ubaldo ne' Comentarj su Archimede, e Vossio degli Scrittori Matematici.

genesi di esse curve, e nel raccorne le proprietà, onde distinguonsi, sviluppando la natura, ed i rapporti di quelle cose, che concorrono a generarle. E nell' altro non si fa, che proporre una generalissima equazione quadratica indeterminata, dal di cui maneggio le specie rilevinsi delle linee di II°. ordine, le proprietà loro, ed i modi di generarle. Dunque l' eccellenza del primo di questi due metodi riluce nella *semplicità della genesi* di ciascuna curva conica, e nell' *eleganza dello sviluppo delle di lei affezioni*: laddove quella dell'*Inverso* vuol ripetersi dalla facilità di comprendere, e di eseguire quelle analitiche evoluzioni, onde raccolgonsi dalla mentovata equazione le proprietà di esse curve.

§. 6. Or le curve coniche si possono intender nate dalla sezione del cono fatta con un piano in varie guise: i loro perimetri talor si generano con de' moti organici, talora per isviluppo di fili implicati a certe lamine convesse: ed anche colla riga, e col compasso è riuscito a'Geometri di segnar que' punti, pe' quali passerebbero tali curve, o di segnarli con delle convenevoli projezioni. Di più lo sviluppo delle proprietà loro può eseguirsi con un processo puramente sintetico (7), il quale principalmente consiste nella trasmutazione di ragioni

(7) Quello, che in Algebra si ottiene col maneggio delle analitiche Equazioni, nella Sintesi deesi procurare colle trasmutazioni delle ragioni geometriche.

geometriche: ed esso può ben anche guidarsi a fine con un giudizioso maneggio delle analitiche equazioni. Dunque diversi metodi si possono convenevolmente prescrivere, ed eseguir con eleganza tanto nel formar gli Elementi delle curve coniche, che nel darne le loro Istituzioni a' giovanetti.

§. 7. Ma tra tutte queste genesi delle curve coniche, qual n' è mai cotanto semplice, e geometrica, quanto l' è quella per sezione? Il cono, e la posizione di un piano solamente esigonsi a generarle: senza che vi s' avviluppino e moti, e tensioni di fili, e congegnazioni di strumenti, ed altre cose dalla semplicità geometrica aliene.

§. 8. Intanto i Geometri anteriori al grande Apollonio impiegavano il cono retto per la genesi di queste curve (8): esigendone che fosse perpendicolare ad un lato del triangolo per l' asse il diametro di ciascuna di coteste sezioni. Dunque dovean proporvi il cono rettangolo per la genesi della Parabola, l' acutangolo per l' Ellisse, e l' ottusangolo per l' Iperbole. E quindi da' nomi di cotesti solidi

---

Ed un Giovane, che vuol convertire una qualche dimostrazione dall' un metodo nell' altro, non solo dee aver familiari gli artifizj inventorj di questi due metodi; ma ne dee conoscer benanche la loro corrispondenza.

(8) Vedi il Commentario di Eutocio nel I. lib. di Apollonio.

la Parabola fu detta *sectio coni rectanguli*, l'Ellisse *sectio coni acutanguli*, e l'Iperbole *sectio coni obtusanguli*.

§. 9. Ma era serbato al grande Apollonio l'intender come da un qualunque cono, o ch' ei sia retto o pure obbliquo, ciascuna della curve coniche potesse ricavarsi, sol che un piano lo seghi in diverse guise. E volle il Valentuomo chiamarle *Parabola, Ellisse*, *ed Iperbole*: poichè nella prima di queste sezioni il quadrato di ciascuna semiordinata pareggia il rettangolo del lato retto nella corrispondente ascissa; mentre nella seconda quello di questo n' è minore, e nell' Iperbole n' è poi maggiore (9).

§. 10. E volendo quì divisare gli argomenti di quegli otto libri, io non fo che trascrivere quel tanto, che Apollonio n' espresse in una sua lettera ad Eudemo. » *Ex octo autem libris, quatuor primi hujus disciplinae continent elementa. Quorum primus quidem complectitur generationes trium coni sectionum, et earum quae oppositae dicuntur; itemque principalia ipsarum accidentia, a nobis et uberius, et universalius, quam ab aliis,*

(9) Recò meraviglia a' Geometri Antichi, che Apollonio avesse felicemente scoverta la genesi universale delle curve coniche, dando loro i convenevoli nomi di Parabola, d'Iperbole, e di Ellisse, ond'essi meritamente lo chiamarono il Gran Geometra.

qui de ea re scripserunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quae attinent ad diametros, et ad axes sectionum, et ad illas lineas, quae cum sectione non conveniunt, quae a Graecis ἀσύμπτωτοι *appellantur: tum de aliis disserit, quae et generalem, et necessariam utilitatem ad determinationes afferunt. Quas autem vocem diametros, et quos axes ex hoc libro cognosces. Tertius liber continet multa, et admirabilia Theoremata, quae utilia erunt, et ad solidorum locorum compositiones, et ad determinationes. Quorum complura, et pulcherrima, et nova sunt. Haec nos perpendentes, animadvertimus non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres, et quatuor lineas; verum ipsius tantummodo particulam quamdam: atque hanc non satis feliciter. Non enim fieri poterat, ut ea compositio recte perficeretur absque iis, quae a nobis inventa sunt* (10). *Quartus liber tradit quot modis conorum sectiones inter se, et circuli circumferentiae occurrere possint; et multa alia*

---

(10) Apollonio qui intende parlare del famoso Problema *delle quattro rette*, del quale io vi recai la soluzione geometrica nella prima Edizione di questi Elementi. Ma egli verso la fine del Lib. III. de' Conici rapporta le proprietà de' Fuochi, o degli Umbilichi, che dagli Antichi dicevansi *puncta ex comparatione facta*.

ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriae proditum est. Coni sectio, et circuli circumferentia, et oppositae sectiones ad quot puncta oppositis sectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem scientiam pertinent. Quintus enim de minimis et maximis magna ex parte agit (11). *Sextus de aequalibus, et similibus coni sectionibus. Septimus continet Theoremata, quae determinandi vim habent* (12). *Octavus Problemata conica determinata. At vero omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi sui sententia judicare.*

§. 11. Nel *quarto* secolo dell' Era volgare i Conici di Apollonio furono illustrati con molti Lemmi da Pappo Alessandrino. E nel *quinto* Eutocio Ascalonita, e la saggia Ippazia, figliuola di Teone Alessandrino, gli ornarono con de' Comenti (13). Gli Arabi dal *nono* secolo in poi fecero nel loro idioma alquante Parafrasi su i primi sette libri de'

---

(11) Questo Gran Geometra nel Lib. V. de' Conici gittò le fondamenta delle Teorie moderne de' raggi *de' Circoli Osculatori*, e *dell'Evolute*.

(12) Apollonio nel VII libro de' Conici esamina i rapporti, che han fra loro i diametri conjugati ed i parametri sì nell' Ellisse, che nell' Iperbole.

(13) I Comenti di questa saggia donna si son perduti interamente: e ne son rimasti que' soli, che aveane composti Eutocio Ascalonita.

medesimi Conici. E verso la metà del secolo *decimosesto* apparvero in Italia due versioni latine de' primi quattro libri di Apollonio: la prima scritta infelicemente da Memmio Veneziano nell'anno 1537, e l'altra fatta nel 1566 da Federico Commandino Urbinate con penetrazione, ed eleganza (14).

§. 12. Ma i Geometri di Europa in sino alla metà del secolo trascorso non ebbero che i primi quattro libri de' mentovati Conici; e ne agognarono mai sempre i rimanenti. Onde l'Ab. Maurolico, insigne Geometra Messinese, volendoli restituire col ponderarne i loro argomenti trasmessici da Pappo, o espressi nella lettera quassù recata nel § 10., vi riuscì lodevolmente nel poterne solamente abbozzare nell' anno 1547 il quinto, e'l sesto libro de'Conici suddetti. E Vincenzio Viviani celebre Geometra Fiorentino seguendo le orme di Maurolico si pose ancor egli verso la metà del secolo decimosettimo ad ordire una geometrica Divinazione al quinto libro di Apollonio, ch'è su i *Massimi*, ed i *Minimi*.

---

(14) Commandino nella sua versione de' primi 4. libri di Apollonio soggiunse ad ogni dimostrazione di questo Geometra tanto i Comenti di Eutocio, che le sue note geometriche. Ed alla fine di una tal opera ne recò i II. lib. delle sezioni cilindriche, e coniche di Sereno Antessense, il quale fiorì nel secolo III. dell' Era volgare, e destinò quest'opera a togliere quel volgare pregiudizio, che l' Ellisse conica fosse ben diversa dalla cilindrica.

Ma chi l' avrebbe creduto ! cotest' opera del Viviani par che avessene promosse in Europa non poche Parafrasi Arabe de' Conici di Apollonio , ed impegnati gli Eruditi ad altrettante versioni. Imperocchè il nostro Borelli essendosi imbattuto nella Biblioteca Medicea in un Manoscritto (15) Arabo , (che conobbe chiaramente contenere i primi VII. libri di Apollonio) ottenne dalla generosità di Ferdinando II. Gran Duca di Toscana di farlo translatare in idioma latino da Abramo Ecchellense Maronita. E Giacomo Golio peritissimo nelle lingue Orientali, e nella Geometria ritornando da Oriente con molti Manoscritti Arabi vi condusse anche tre de' rimanenti libri de' conici di Apollonio , cioè il V il VI ed il VII. Ma la sua versione, e quelle di Claudio Hardy, e di Cristiano Ravio (16) , uscirono alla luce dopo dell' opera dell' Ecchellense.

§. 13. Or mentre in Roma compivasi dall'Ecchellense, e colla cura dell' acutissimo Borrelli la

(15) Ignazio Neama Patriarca Antiocheno lasciò in dono a Ferdinando I. Gran Duca di Toscana un gran numero di Manoscritti Orientali, tra' quali poi si rinvenne la parafrasi Araba, che de' primi 7. lib. di Apollonio aveane fatta Abalfato Aspahanese. Vedi la Pref. all' Apoll. del Borelli.

(16) Cristiano Ravio compì la sua versione coll' ajuto del dotto Matematico Samuele Reihero. Vedi Att. degli Erud. di Lips. an. 1665. pag. 399. E Giorgio Krafft. nell' Istor. della Geom. Subl.

versione del Manoscritto Arabo, Vincenzio Viviani accelerò ad istanza de' suoi amici l' intrapresa Divinazione: ed istampolla nel 1659 due anni prima della versione dell' Ecchellense, che fu anteriore, come si è detto quì sopra, a quelle de' due Codici Goliano, e Raviano. Intanto dopo d'essersi pubblicate siffatte versioni, piacque a' Matematici di confrontare insieme il V libro di Apollonio colla sua Divinazione fattane dal Viviani: e da essi fu deciso, che in alcune Teorie il Geometra Italiano era del pari profondo, che quello di Perga: e che in altre il Viviani erane ito più lungi di Apollonio, cioè del Gran Geometra dell' Antichita Rimota. Onde meritevolmente potrà considerasi questa Divinazione del Viviani, come un degno supplemento alle antiche Teorie delle curve coniche.

§. 14. Finalmente nell' anno 1710 uscì da' torchi della Città di Oxford la più nitida, e la più magnifica edizione de' Conici di Apollonio per opera di Edmondo Halley: ove quesi' insigne Astronomo ne restituì benanche l' ottavo libro con una geometrica Divinazione, il cui titolo è *Apollonii Conicorum liber* VIII *restitutus, sive de Problematis determinatis Divinatio*. Ne' primi 4 libri vi è il testo greco con accanto la versione latina: gli altri tre, che vi seguono ordinatamente, sono nel solo idioma latino, ritratti dal Codice Goliano, e dalla versione dell' Ecchellense: e l' ottava libro l'è finalmente un lavoro dell' Ingegno dello stesso Halley, ed ha per oggetto l' investigazione de' diametri delle Curve

Coniche, che abbiano certe condizioni. Questo profondo Geometra avea pur anche nell' anno 1706 pubblicata un' altra opera di Apollonio *de sectione rationis, et spatii*, reintegrandola da un manoscritto Arabo rinvenuto nella Biblioteca Bodlejana. E quest' opera, per quanto si rileva dalla sua *epigrafe*, dalle cose che vi si contengono, e dalla indicazione che ne fa Pappo, è ben diversa dall' ottavo libro de' Conici di Apollonio, e dalla divinazione di esso fattane dallo stesso Halley. Nè quindi so intendere, come il dottissimo Krafft stenti a comprendere la diversità di queste due produzioni del sommo Halley. Vedi la sua Istoria della Geom. Subl. pag. 23.

§. 15. Or sebbene quest' opera di Apollonio fosse sembrata a' Dotti sì pregevole e compita, che niun de' Geometri dovesse aver l' ardimento di darle nuovo torno, non che di aggiungerle cosa nuova; pur non dimeno nel 1632 il Cavalier Claudio Midorgio Parigino ebbe il coraggio di sistemar gli Elementi delle curve coniche (17) con un metodo diverso dall' Apolloniano, e di aggiungervi alcuni modi particolari, onde descriverle per assegnazion di punti. Ed ei fu il primo, che chiamò ***Parametri delle curve coniche*** quelle linee, che dagli

(17) Le opere di Maurolico diedero de' gran lumi a Claudio Midorgio. Vedi la pref. d' Conici del Borelli, e Krafft §. 15. dell' istor. della Geom. Subl.

Antichi dicevansi (18) *Lati retti*: la qual denominazione si è costantemente da' moderni Geometri ritenuta.

§. 16. Nell'anno 1647 apparve nella Repubblica de' Letterati la *Quadratura del Circolo*, *e dell'Iperbole* del P. Gregorio di S. Vincenzo Gesuita de' Paesi Bassi: opera ricolma di verità nuove ed utili non solo alla dottrina de' Conici, che a' nuovi Metodi d'inventare (19).

§. 17. Il Signor Giovanni de Witt, felice Geometra e sgraziato Politico di Olanda (20), insin

---

(18) Il parametro dicevasi dagli Antichi *Latus rectum*, quasi *Latus erectum*, perchè solevasi porre perpendicolarmente al *Trasverso*.

(19) Ecco su tal proposito un vantaggioso giudizio di quest' Opera fattone dal Leibnitz, Acc. di Lips. 1695. *Majora subsidia attulere triumviri illustres Cartesius ostensa ratione lineas Geometriae exprimendi per aequationes*, *Fermatius inventa methodo de maximis et minimis*, *et Gregorius a S. Vincentio multis proeclaris inventis.*

(20) Giovanni de Witt avendo lasciati gli ameni Studj delle Matematiche si diede alla Politica, e co' lumi di questa Scienza divenne tanto utile alla sua Patria, quanto le fu Cornelio di lui fratello col suo coraggio. Ma tutti e due nel 1672 furono sgraziatamente tagliati a pezzi dal furor popolare adizzatosi dalla fazione dello Statolder. Ippazia Alessandrina intendentissima della Geometria Sublime anche per una sollevazione del Popolo fu trucidata nel IV secolo della Chiesa, come il fu ne' tempi più rimoti lo stesso Principe de' Geometri Archimede Siracusano per simili cagioni.

dall' anno 1658 comprese gli Elementi delle *linee curve* divisi in due libri: nel primo de' quali recò la genesi delle curve coniche per moti di rette giacenti in un piano: e di là ne attinse sinteticamente, e con eleganza le proprietà loro. Ma nel secondo ei dissertò su i *Luoghi geometrici*: salendo gradatamente dalle più semplici in fra l' *equazioni quadratiche a due indeterminate* alle più composte, ed universali.

§. 18. Inoltre il Signor de la Hire pubblicò nel 1685 un' opera compiuta sulle curve coniche, dimostrando col metodo sintetico tutto ciò, che ad esse principalmente si appartiene. Questo celebre Geometra adottò alcuni principj del Signor Desargues, e dell' ingegnosissimo Signor Pascale: ma molte altre verità nuove ed eleganti ei vi aggiunse (21) colla propria speculazione.

---

(21) L' ingegnosissimo Signor Pascale servendosi di una retta divisa armonicamente seppe molte verità su i Conici dimostrare con eleganza, ed universalmente. Ma quest' opera si è perduta: e solamente nelle lettere di Cartesio si fa menzione di essa: siccome poche cose ci son pervenute di una consimile opera di Desargues. Ma Filippo de la Hire nel 1685 stampò i suoi elementi de' Conici con que' principj della division conterminale di una retta, e senza punto nominarvi il Borelli, che nell' anno 1676 l' avea prima di lui adoperata. Lo che dispiace agli Eruditi. Vedi Krafft. Geom. Subl. p. 70.

§. 19. Verso la fine del secolo decimosettimo Cristiano Ugenio, acutissimo Geometra Olandese, oltre ad aver nitidamente risoluti non pochi Problemi solidi (22), trattò con eleganza delle *dimensioni* delle curve coniche, e delle loro *evoluzioni*. E l' Immortal Newton destinò la sezione IV, e V de' suoi Princip. Matem. della Filos. Nat. ad isnodare alquanti difficilissimi Problemi sulle *Tazioni* di tali

(22) Questo gran Geometra sciolse' con indicibil eleganza i seguenti Problemi su i Conici. *Ritrovare una retta uguale ad un dato arco parabolico. Esibire un cerchio uguale alla superficie della Conoide, che vien generata da una sezione conica rivolta intorno al suo asse*: ed altri. Ma tra queste soluzioni quella dell' antichissimo Problema *di divider la Sfera in una data ragione* sembra di una maravigliosa semplicità: imperocchè egli la fa solamente dipendere dalla trisezione dell' angolo, senza ricorrerne alla combinazione della Parabola e dell' Iperbole, o dell' Iperbole e dell'Ellisse, come fecero alcuni Geometri antichi. Ma un nostro Geometra ha dimostrato potersi trarre dal proposto Problema l' Equazione $x^3 - 3rrx + rr(2r - a) = 0$, ove r dinoti il raggio della data sfera, x la distanza del centro della sfera dal piano segante, ed a l' altezza del cono, che abbia per base il circolo massimo, e siavi uguale ad uno de' segmenti richiesti. Ed essendo cotesta Equazione pariforme a quella, che il Cartesio rinvenne per la trisezione angolare, sarà facilissima cosa il ridurre quel Problema a questo, e poi comporlo geometricamente.

curve. Questo Geometra, ch' era tutt' intento a promuovere il suo metodo delle Flussioni, ed a chiarir colla Geometria le arcane Leggi de' Cieli e della Natura, s' intrattenne per alleviar sue cure nelle amene vie dell' Analisi Antica: e (23) quivi abbattendosi al Problema delle quattro rette, di cui si cercava fin da que' tempi la geometrica composizione (24), il disciolse immantinente, ed in

(23) Il Problema delle quattro rette, la di cui composizione fu recata nella 1. Edizione di questi Elementi, vien da Pappo riferito ne' seguenti termini (Pref. al 7. Lib. Collez. Matem.). *Si ad quatuor rectas lineas positione datas in datis angulis lineae ducantur ab uno, eodemque puncto; et rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data sit; illud punctum datum coni sectionem positione continget.*

(24) Cartesio parlando nel libro 1. della sua Geometria di una tal Quistione si disse: *quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quisquam alius penitus resolvere potuerat.* Ed autenticò la sua opinione co' seguenti detti di Pappo (Pref. lib. 7. Collez. Matem.). *Quem dicit Apollonius in lib.* III. *locum ad tres et quatuor lineas ab Euclide perfectum non esse, neque ipse perficere poterat, neque aliquis alius.* Ed io vi aggiungerei le rimanenti parole del medesimo pagagrafo cioè: *sed neque paullulum quid addere iis, quae Euclides scripsit per ea tantum conica, quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt, ut etiam ipse testatur, dicens, fieri non posse ut locus perficeretur absque iis, quae ipse scribere coactus sit.* E questi detti di Pappo alludono a ciò che Apollonio avea indicato nell' epigrafe del

egregj modi. Poichè egli nel congegnarne l'anzidetta composizione non si valse di altri principj, che di que' soli, che a' Geometri Greci eran noti.

§. 20. Nel principio del secolo antipassato Lorenzo Lorenzini, che fu nobile Allievo del Viviani, nell' ozio e tra disagi di una prigione ove per 20 anni sciaguratamente fu ritenuto, compose sei Esercitazioni geometriche, che han per oggetto le

---

III.° libro de'Conici (§.10). *Non enim fieri poterat, ut ea compositio recte perficeretur absque iis, quae a nobis inventa sunt.* Or da tutto il contesto di Pappo, e dalla detta epigrafe di Apollonio un' altra illazione io qui ritraggo. Cioè co' soli Conici di Aristeo nè Euclide, nè Apollonio, nè verun altro Geometra potè mai comporre il Problema delle quattro rette. Apollonio vi scovrì de' nuovi principj per la perfetta composizione di un tal luogo, e con essi ne riuscì lodevolmente. Ed in vero, se Apollonio non avesse composto il Problema delle quattre rette, come poteva categoricamente asserire un tal luogo esserne una delle tre curve coniche data di posizione? Or se il compose, dovè anteriormente praticarvi con buon successo l'analisi geometrica, cioè risolverlo: dovendo quella nascer da questa. E s' ei ne avesse tentata la soluzione senza guidarla a fine (al che alludono le parole del Cartesio) non avrebbe menata una sì magnifica jattanza, ed a spese del mitissimo Euclide, rimprocciandogli quel che si legge nell' epigrafe del suo libro terzo de'conici nella citata lettera ad Eudemo (§. 10.).

sezioni coniche, le cilindriche, i solidi nati dalle loro rivoluzioni, le linee logaritmiche, ed altri punti interessanti di Geometria. Ed ei non solo seppe ingradarsi oltre alle invenzioni Apolloniane, e Vivianee; ma ristaurò pur anche l' arte di elegantemente geometrizzare alla maniera Greca, che gl' Italiani si pregiaron mai sempre di emulare. Ma una sola di queste Esercitazioni fu data in luce nel 1721; e le altre serbansi tuttora nella Biblioteca Magliabecchiana (23), quai preziosi parti del suo ingegno.

---

(23) Vedi Ferronio ne' *Prolegomeni delle Grandezze Esponenziali pag.* XXV.

METODO DE' LIMITI.

§. 21. Il Grande Archimede impegnatosi *alla dimension de' Curvilinei*, che in que' tempi era un oggetto nuovo ed interessante in Geometria, adottò quel nobile e sicuro metodo d' *Esaustione* o de' *Limiti*, dal cui seno poi ne sgorgarono gli altri due degl' *Indivisibili*, *e delle Prime ed Ultime Ragioni* (24). Se in una figura curvilinea (eccone un abbozzo di questo metodo) continuamente iscrivansi de' rettilinei, ed altrettanti le si circoscrivano, sicchè la differenza di quelli e di questi possa divenir minore di qualunque grandezza assegnabile; tanto i rettilinei iscritti nella figura curvilinea, che i circoscritti si diranno *terminare* in essa: e questa figura sarà *limite* degli uni e degli altri. Or da queste nozioni traggonsi due principj regolatori delle dimostrazioni di tal genere. I. *Quelle grandezze, che hanno un' istesso limite, si debbono avere per uguali.* II. *Se le grandezze, che continuamente iscrivansi in due figure, ed in sin che terminino in queste, abbian sempre fra loro una*

---

(24) Ecco ciò, che ne dice Wallis di Archimede: *Vir stupendae sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventiouum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur.*

data ragione; questa medesima ragione dovranno avere le figure anzidette (35).

METODO DEGLI INDIVISIBILI.

§. 22. Bonaventura Cavalieri Geometra Milanese, il cui nome sarà sempre chiaro in Europa pel suo metodo *degl' Indivisibili*, e per le molte verità con esso brevemente dimostrate, gittò egli il primo le fondamenta de' *Metodi Sommatorj*: di che poi si valsero non pochi illustri Matematici per la dimensione de' Curvilinei. Questo metodo, ch' è bene d' illustrare a' giovanetti, parmi esser diviso in due rami, il primo de' quali io quì adombro e per le sole figure piane: poichè l' altro può conoscersi da (36) questo, e l' uno e l' altro a' solidi applicarsi. Cioè sulla retta AD, e dalla medesima parte di essa sien costituite le due figure piane AFB, CGD di uguali altezze: ed ovunque nelle dette figure conducasi la retta *ad* parallela a quella base. Ed oltre a ciò le parti *ab*, *cd* di questa retta sien sempre nella constante ragione di *m* ad *n*; *le mentovate figure* AFB, CGD *dovran benanche avere la medesima ragione* di *m* ad *n*. Imperocchè fig. 1

(35) Vedi Maclaurin nell' Indroduzione al *Traité des Fluxions*; e Ferronio sul *Binomio Newtoniano* §. 9. *Oper. cit.* per l' estensione di un tal principio.

(36) Vedi Geom. di Cavalieri lib. III. e IV.

per la 12 Fl. V. tutte le rette AB, *ab*, etc. a tutte le altre CD, *cd*, etc. sono nella ragione di *m* ad *n*. Dunque la figura AFB starà all'altra CGD come *m* ad *n*.

§. 23. Ma quest' ultima illazione non può reggere in alcun modo, se non vi si supponga, che tanto le rette AB, *ab*, etc., che le altre CD, *cd*, etc. occupino le due figure AFB, CGD respettivamente. Il saggio Geometra temendo di cadere nello Zenonistica composizion del continuo con siffatta *occupazione* cercò di scansarla. Ma venendo gagliardamente constretto dalle imputazioni, che poi gli fece il Guldino, si lasciò dire *me non numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quae adaequatur spatio ab iisdem occupato* (Scol. Prop. 1. Lib. II) E poi dichiarò, che quelle rette occupatrici de' detti spazj doveansi prendere per altrettanti rettangoli ridotti alla minima loro latitudine: e che il suo Metodo, sebbene sia più energico ed attivo di quello de' Limiti, abbia non per tanto la medesima di lui natura. E perciò noi potrem dire coll'illustre Newton, che questo metodo del Cavalieri, ch' è succinto ed attivo nel dimostrare siane alquanto duro.

METODO DELLE PRIME ED ULTIME RAGIONI.

§. 24. Ma il Sommo Newton stimando poco dicevole alla natura delle grandezze continue il crederle nate per addizion di particelle minime indivisibili, quali supponevansi dal Cavalieri, dal Torricelli, e dal Wallis (27); un' altra genesi volle di esse concepirne, ed un altro metodo per la misura de' curvilinei prescrisse. Pensò il Granduomo, che in rigor di Geometria ogni quantità continua si debba intender generata dal moto di un punto, di una linea, o di una superficie, secondocchè quella contengane una sola dimensione, o ne abbia due, o tre dimensioni. E vi soggiunse, che di tali grandezze si debbano prendere le prime parti nascenti, o le ultime evanescenti, quando si tratti della misura de' curvilinei. Ma coteste particelle non sono geometricamente assegnabili: ed anche niun vantaggio si conseguirebbe nel considerarle di una infinitesima, ed inconcepibile grandezza. Perciò accortamente ci si restrinse a prender le ragioni di quelle quantità nascenti, o di quelle altre evanescenti:

---

(27) Il Sig. Wallis avendo applicato il calcolo alla Geometria degl' *Indivisibili* spinse più oltre cotesto Metodo. Ma le sue ricerche particolari non furono, che un' ombra di ciò che poi fece il Cavalier Newton nel *Metode des Fluxions*, *et des Suites Infinies.*

poichè i termini di siffatte ragioni son grandezze finite, e paragonabili fra loro. E chiamò que' rapporti *le prime, o le ultime ragioni.* E con tal principio distese tante leggiadre dimostrazioni, che osservansi ne' Princip. Matem. della Filosofia Naturale, e da cui derivò l' Analisi delle Flussioni, ch'è un metodo assai più attivo, ed universale di quei di Esaustione, e degl' Indivisibili.

§. 25. Or io eccederei la meta del mio assunto, se volessi prefigger le leggi di cotesto metodo, non per tanto per chiarimento di esso, ne recherò
fig. 6 il seguente geometrico esempio. Nella curva AMD qualunque siane la sua natura, si tiri per lo punto M la tangente MH, la normale MK, e l' ordinata MF all' asse AK. E poi la corda, che passa per lo contatto M e per lo vertice A, intendasi rotare intorno al contatto M e verso la tangente MH. Cotesta retta andrà tagliando da tal curva degli archi sempre minori de' primi, e vi formerà coll' ordinata MF altrettanti angoli, che tanto meno dovran differire dall' angolo FMH fatto dalla stessa ordinata e dalla tangente, quanto più la rotante si appresserà alla tangente. Or supponghiamo esserne MG l' ultimo de' detti archetti. Sarà il triangolo MEG simile all' altro MFK. E quindi la ragione dell' ultimo archetto evanescente MG alla sua altezza GE sarà quanto quella della normale MK all' ordinata MF. E sarà pure ME ad EG, come la stessa ordinata MF alla sottangente FH. Il perchè, se la curva AGM sia una parabola, e nello spazio esterno intendasi circoscritto il picciol parallelogrammo

PMER, e l'altro corrispondente FMNB siane circoscritto nello spazio interno, sarà il primo di questi parallelogrammi all'altro, perchè equiangolo, in ragion composta di PM ad MF, e di ME ad EG. Cioè in ragion composta di PM ad MF e di MF ad FH, vale a dire come PM ad FH, o come 1 a 2: essendo in questa curva la sottangente dupla della sua ascissa, come dimostrasi nel I. libro. Dunque sarà il parallelogrammo PE una metà dell'altro MB. E così tutto lo spazio esterno PAGM dovrà essere una metà dell'interno MFAG, e quindi un terzo del parallelogrammo MFAP.

§. 26. Alcuni di que' moderni Geometri, di cui si è fatto quì sopra onorevol menzione, consegrarono all'utile della Gioventù studiosa alquante brevi Istituzioni sulle curve coniche. Così il nostro Borelli nell'anno 1679. pubblicò un Compendio de' Conici, dimostrando con indicibil nitore quanto ei si propose su tale assunto: e quivi si valse della *division conterminale di una retta* per principio di alcune dimostrazioni (28), di cui la più parte son dedotte dalla genesi di queste curve pel cono. Il Signor de la Hire nell'istesso tempo stampò in Parigi un giudizioso Opuscolo sulle Curve coniche, aggiungendovi i Luoghi Geometrici per la composizione de' Problemi solidi. E dopo di esso il Padre

---

(28) La division *conterminale* è la stessa che l'armonica.

Guido Grandi Abate Camaldolese diede in luce il *Compendio delle Sezioni Coniche*: il quale, secondo che ne giudica il dottissimo Cristiano Wolfio, è un libretto *mole parvus*, *sed ubertate rerum gravis*.

§. 27. Verso la metà del secolo trascorso apparvero in Londra gli Elementi de' conici di Roberto Simson (che meritamente può dirsi l' Apollonio Anglicano) divisi in 5. libri. Alla fine dello stesso secolo quivi usciron da' Torchi gli Elementi delle curve coniche del Signor Hutton, i quali secondo il Montucla sono un modello di chiarezza, e precisione. E nella nostra Italia si è prodotto dall'insigne Cagnoli un elegante corso di sezioni coniche, che piace a' Geometri.

§. 28. Molte altre istituzioni su i Conici si sono in diversi tempi, e da diversi Geometri congegnate, che il solo indicarle farebbemi eccedere la meta, che mi ho proposta. Ond' io passerò volentieri a divisare i principali corsi analitici delle Sezioni Coniche per compiere una Storia ragionata di questo argomento: trattenendomi per poco sulle scoverte fatte dal Cartesio in tal soggetto.

§. 29. Il Sig. delle Carte, innestando alla Geometria le analitiche grandezze, e le operazioni di queste agli artifizj di quella ragguagliando, scoverse il convenevol modo da esibire la natura di ciascuna curva per l' Equazione fra le coordinate di essa. E da ciò si conchiuse una *curva esser Geometrica*, o *Meccanica*, secondochè la sua caratteristica Equazione contenga grandezze algebriche so-

lamente, o ne abbia benanche delle transcendenti. Che anzi le linee Geometriche si sogliono classificare *in Ordini*, ed *in Generi* nel seguente modo. *Una linea dicesi del I.° Ordine*, se la sua Equazione non ecceda la prima dimensione, com' è la retta. E si dicon *linee di II.° Ordine*, *o curve di primo Genere* quelle altre, le cui Equazioni ascendono al secondo grado. Ed a tal Classe appartengonsi le curve coniche, di che quì appresso ragioneremo. Inoltre appellansi linee di *III.° Ordine*, o curve di *II.° Genere* quelle altre, le cui Equazioni fra le due variabili, che vi esprimono le respettive loro coordinate, son di terzo grado. E così più appresso.

§. 30. E quindi ad un sagace, e franco calcolatore sarebbe stata lieve cosa il trarre l' *equazioni alle curve coniche* da una qualunque genesi, che loro si premetta, e poi dal maneggio di tali Equazioni rilevarne le proprietà, di cui son colme coteste linee di 2.° ordine. Ma il raccorle tutte con un agevole calcolo analitico, e da una genesi organica semplice ed elegante, era serbato all' illustre Geometra delle Gallie il Marchese de l' Ospitalè. Questo nobil germe della splendidissima Famiglia Gallucci da Napoli traspiantata in Parigi seppe ne' dieci libri *del suo Trattato Analitico delle Sezioni coniche* leggiadramente dimostrare quando a queste curve si appartiene: temperando con mirabil arte i sintetici lavori con quelli, che l' Algebra ne offre. Ei vi aggiunse i *Luoghi Geometrici*, discendendo dalle generalissime equazioni

delle curve coniche alle particolari, e semplici: e prescrisse il modo di costruire l'equazioni di terzo, e di quarto grado colla combinazione di esse curve. Quest' opera è stata compendiata dal Sig. Trevigar negli Elementi delle Sezioni coniche stampati in Cambrigia nell' anno 1731. Ed altri Geometri han poi prodotto simili opuscoli sullo stesso assunto per utile della gioventù studiosa: tra' quali distinguonsi quelli del Wolfio, e dell' Abate Marie, il quale fonda la sua analisi nella genesi di esse curve per la sezione del cono.

§. 31. Ma alcuni moderni, e sagacissimi Analisti han desiderato, che in quell' Opera del Marchese dell' Ospitale vi fosse più pura, ed insiem più attiva quell' Analisi, che vi s' impiega: poichè la piupparte degli artifizj euristici non son che geometrici, e di tal natura son anche molte dimostrazioni, che quivi appajono con simboliche divise. E perciò si è fra noi proccurato di produrre, son già alcuni anni, un *Trattato Analitico delle Curve Coniche* (29), ove premessa la genesi organica di esse curve, con mezzi puramente algebrici e col regolo della Geometria Cartesiana ne vengono sviluppate le più utili, ed insigni proprietà loro, relativamente *a' Diametri di esse Curve*, *alle Tangenti e Seganti*, *a' Fuochi*, *ed alle Dimensioni*. E risolvonsi moltissimi difficili Problemi.

---

(29) *Trattato Analitico delle Sezioni Coniche del Signor* N. F. 1815.

§. 32. Ciò premesso ecco le leggi del *Metodo inverso*, onde sovente giova trattare i Conici. Si pianti l' Equazion fondamentale alle linee del II.° Ordine nella massima generalità possibile, come l' è questa $A + Bx + Cy + Dxx + Exy + Fyy = o$. Si procuri di aver distinte, e familiari tutte le convenevoli evoluzioni, che sogliensi utilmente praticare sulla proposta Equazione. Da ciò si rilevino con quella semplicità ed ordine, che si conviene, le seguenti determinazioni: cioè *le Specie delle linee di II.° Ordine*: *le forme de' loro rami curvilinei*: *la natura*, *e 'l sito de' loro diametri*: *le Sottangenti*, *gli Assintoti*, *e le Normali*: *i numeri de' punti*, *in che si segan fra loro*, o *colle rette*: *i rapporti delle corde*, *che si tagliano fra loro*, *o che procedano da un qualche punto insigne di ciascuna di esse curve*, *ed altre simili ricerche*. Questo piano puramente analitico fu la prima volta con eleganza eseguito dal Sommo Analista il Sig. Eulero, e poi adottato da' celebri Matematici il Sig. Cramer, il P. Vincenzo Riccati, il Canonico Saladini, il Sig. la Croix, ed altri. E queste sono le preliminari nozioni, che ho stimato per l' utile de' Giovani doversi quì recare. Ed in fin soggiungo cinque Lemmi Geometrici, affinchè alcune dimostrazioni de' tre seguenti Libri, le quali han bisogno di que' principj dimostrativi, ne sieno men gravi.

LEMMA I.

33. *Se diansi le seguenti analogie . . . . . .*

AB : *ab* :: PQ : *pq*,
BC : *bc* :: QR : *qr*,
CD : *cd* :: RS : *rs*,
etc.,

qualunque sia il numero di esse ; potrà conchiudersi, che la somma degli antecedenti delle prime ragioni stia alla somma de' loro conseguenti, siccome la somma degli antecedenti delle seconde ragioni alla somma de' conseguenti di esse, quando sien benanche i primi antecedenti proporzionali a' secondi, o i conseguenti delle prime ragioni proporzionali a que' delle seconde.

fig. 6 *Dim. Part.* I. Suppongansi in coteste analogie i primi antecedenti proporzionali a' secondi, cioè che stia AB : BC : : PQ : QR, BC : CD : : QR : RS, *etc.* E poichè invertendo la prima di queste due analogie sta BC : AB : : QR : QP, ed è poi per ipotesi AB: *ab* :: PQ : *pq*, sarà, *ex aequo*, BC : *ab* :: QR : *pq*, ed invertendo *ab* : BC :: *pq* : QR. Ma per ipotesi è anche BC : *bc* : QR : *qr*. Dunque sarà di nuovo per equalità ordinata *ab* : *bc* :: *pq* :: *qr*. E ciò sempre dimostrandosi, potrem conchiudere esserne i conseguenti delle prime ragioni proporzionali a' conse-

guenti delle seconde, quando gli antecedenti di quelle si suppongan proporzionali agli antecedenti di queste.

Ciò posto, poichè si è detto starne AB : BC :: PQ : QR: sarà componendo AC : CB :: PR : QR. Ma è pure per la detta condizione CB : CD :: AR: RS. Dunque sarà *ex aequo* AC : CD : PR : QS, e componendo AD : CD :: PS : RS. Laonde, se le DE ed ST sien l'ultime grandezze, che contengonsi nelle serie ABCDE, PQRST respettivamente, dovrà rilevarsi, che sia AE : DE :: PT : ST. E dovrà benanche inferirsi esserne *ae* : *de* :: *pt* : *st*; ove le *de*, ed *st* sien le ultime delle altre due serie.

Il perchè avverandosi le seguenti analogie AE: DE :: PT : ST, DE : *de* :: ST : *st*, *de*: *ae* :: *st* : *pt*, saran le grandezze AE, DE, *de*, *ae* in ordinata ragione delle altrettante PT, ST, *st*, *pt*. Dunque dovrà esserne per egualità ordinata AE : *ae* :: PT: *pt*.

Part. II. La dimostrazione della seconda parte può farsi, come quella della prima. C.B.D.

34. *Scol.* Ho voluto esporre a'Giovanetti questo Lemma, non solo per far loro intendere su qual principio regga quel Metodo, di cui sovente dobbiam valerci nel dimostrare tante verità geometriche, e meccaniche; ma per guarentirli da un errore, ove non di rado incorresi ben anche da Valentuomini (*a*).

(*a*) Infatti il Signor de la Hire credendo non doversi richiedere alcun' altra condizione in più analogie,

e

LEMMA II.

fig. 8 35. *Nella curva acP rapportata all' asse* AF, *qualunque ella ne sia, inscrivansi i rettangoli* Ba, C*b*, D*c*, ec. *e ad essa circonscrivansi gli altrettanti* B*f*, C*g*, D*h* ec.; *io dico, che l' aja* A*a*PF *debba terminar tanto nella somma de' rettangoli inscritti, che in quella de' circonscritti.*

E se la detta curva insiem con que' rettangoli in essa inscritti, e circoscritti si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo asse AF; *nel solido generato da una tal curva dovrà terminare tanto la somma de' cilindri generati da que' rettangoli, che da questi respettivamente.*

Dim. Part. I. I lati *a*M, *b*N, *c*O, *ec.* di que' rettangoli inscritti nella proposta figura si protrag-

---

perchè le somme de' loro termini omologhi fosser proporzionali, ne derivò fuor di ragione, che il tempo impiegatosi da un grave a discendere per una semicicloide fosse duplo di quello, onde lo stesso grave ne scenderebbe verticalmente per l' asse. Or l'acutissimo Giovanni Bernulli negli Atti di Lipsia an. 1698. il ripresa di cotesto errora col dirci. *Concludit, positis quotcumque, et quibscumque analogiis* $a : b :: c ; d$, $m : n :: p : q$, $r : s :: t : v$, *fore aggregatum omnium primarum* $a + m + r$ *ad aggregatum omnium secundarum* $b + n + s$, *ut aggregatum omnium tertiarum* $c + p + t$

gano, finchè ne incontrino i lati rQ, FP dell' ultimo rettangolo FQ. Sarà il rettangolo Mf uguale all' altro TX. Imperciocchè le Mb ed SX sono uguali fra loro, come lati opposti del parallelogrammo MbXS; e le altre rette aM, ST son pure uguali, per doverne pareggiare le AB ed EF, che nella preposta inscrizione e circonscrizione de'rettangoli nella curva AaPF debbonsi supporre tra se uguali. Laonde l' eccesso del rettangolo circonscritto Bf sul corrispondente inscritto Ba, che vedesi essere il rettangoletto Mf, sarà espresso dall' altro TX. Similmente si dimostra, che YZ, VR, etc. dinotino gli eccessi de' rettangoli circonscritti Cg, Dh, etc. su gl' inseritti Cb, Dc, etc. Onde sarà chiaro esserne il rettangolo TQ la totale differenza di tutti i rettangoli inscritti da tutti i circonscritti. Ma ciascuna delle altezze di cotesti rettangoli può divanir minore di qualunque retta data. Dunque benanche il rettangolo TQ può farsi minore di qualunque dato. E quindi nella proposta figura dovrà

---

ad aggregatum omnium quartarum $d + n + v$: *quod num verum sit judicent alii.* Ma doveasi per utile de' giovanetti, fissar la condizione, che debbono avere i termini di coteste analogie, affinchè le somme de' loro termini omologhi fossero proporzionali. E volendo rimontare alla cagion di quell' errore, io soggiungo un Principio dell'Arte Euristica, *che date due ragioni inuguali non debba esser data la ragion della somma degli antecedenti a quella de' conseguenti.*

terminare sì la somma de'rettangoli in essa inscritti, che quella de' circonscritti. C.B.D.

Part. II. La dimostrazione di questa seconda Parte può farsi come quella della prima.

fi 35 *Def.* Se le curve LEK, ed ALD rapportate al medesimo asse AC sien tali, che ciascuna ordinata CK nella prima di esse sia uguale alla corrispondente normale DS nell' altra, la prima curva si dirà *Scala delle normali della seconda.*

LEMMA III.

Se la figura curvilinea ALDC, *qualunque ella ne sia, si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo asse* AC; *la superficie del solido, che vi si genera, sarà quarta proporzionale in ordine al raggio, alla sua periferia, ed alla corrispondente aja* ACKE *nella scala delle normali.*

Dim. L' ascissa CA si divida nelle particelle uguali CO, O*o*, etc., qualunque sia il numero di esse: e l' ordinata O*d* si protragga, finchè ne incontri la tangente DM. E poi dal punto medio della DM, e dal punto estremo M conducansi le QV ed M*r* respettivamente parallele alla normale DS ed all' ascissa AC. Sarà l' angolo PVQ uguale all' altro MQ*t*, poichè ciascuno di essi compie un retto col medesimo angolo PQV. Onde il triangolo rettangolo PQV sarà simile all' altro triangolo M*t*Q, ch' è pure rettangolo in *t*, e quindi benanche al suo equiangolo M*t*D. E dovendo essere, per la so-

miglianza de' triangoli QPV e MrD, MD ad Mr, come QV a QP, o come la circonferenza del raggio QV a quella del raggio QP; sarà il rettangolo della MD nella circonferenza di QP uguale al rettangolo di Mr, o di CO nella circonferenza di QV. Ma il rettangolo di CO nella circonferenza di QV sta al rettangolo di CO in QV nella costante ragione della circonferenza di un cerchio al suo raggio. Dunque in questa ragione dovrà stare il rettangolo della MD nella circonferenza di QP al rettangolo di CO in QV.

Ciò premesso, la superficie del cono troncato, la quale si genera dalla tangente MD rivolta intorno all' asse AC della detta curva, è uguale al prodotto della medesima MD nella semisomma delle circonferenze de' raggi DC, MO (*Prop.* 13. *lib.* 1. *di Archim.*), o al prodotto della MD nella circonferenza del raggio QP. Imperocchè per construzione la Qt è metà dalla Dr, e la tP dell' aggregato di MO ed rC, come l' è chiaro. Dunque la QP sarà la semisomma delle MO e DC: e la circonferenza del raggio QP sarà la semisomma di quelle, che han per raggi le MO e DC. E quindi la superficie conica di DM sarà al rettangolo di CO in QV, come la circonferenza di un cerchio al raggio. E ciò sempre dimostrandosi, saran tutte quelle superficie coniche a tutti quegli altri rettangoli, come la circonferenza di un cerchio al suo raggio. Ma le dette superficie coniche vanno a terminare nella superficie del proposto solido: ed i mentovati rettangoli, confondendosi in tal caso con

quelli, che si fanno dagli elementi dell' ascissa AC nelle corrispondenti loro normali, anch' essi terminano nell' aja ACKE nella scala delle normali (*Defin. prec.*). Dunque sarà la superficie del solido, che si genera nella rivoluzione della figura ALDC intorno al suo asse AC, alla corrispondente scala ACKE delle normali, come la circonferenza di un cerchio al suo raggio. C.B.D.

L E M M A IV.

fig. e *Se dal vertice* A *del triangolo isoscele* BAC *s' inclini la retta* AD *alla base* BC *di esso; sarà il quadrato di un lato* AB *del detto triangolo uguale alla somma del quadrato dell' incidente* AD *e del rettangolo* BDC *de' segmenti della base* BC, *se quella incidente cada dentro il triangolo. Ed esso sarà uguale alla differenza del quadrato di* Ad *e del rettangolo* BdC, *se tal incidente cadane al di di fuori.*

Dim. Dal punto A si abbassi AP perpendicolare a BC. Sarà per la 47. El I. AB^2 uguale ad AP^2 con PB^2, ed AD^2 uguale ad AP^2 con PD^2. Dunque la differenza de' quadrati di AB e di AD sarà uguale alla differenza de' quadrati di PB e di PD, cioè, per la 5. El. II., al rettangolo BDC. E sarà quindi AB^2 uguale ad AD^2 con BDC. E così per la 6. El. II. può dimostarsi la II. parte. C.B.D.

ERRATA.

Pag. 6	*v.* 6 *cit.*	10. XI.	15. XI.
8	2	IPA	TPA
25	12	*Def.* v.	Questa è veramente la *Def.* IV. e così procedendo innanzi per la numerazione delle defin. di questo 1.° Libro.
28	8 *cit.*	58	57
	13	BDN	BCN
35	1	VI.	XVI.
37	4	AV	BT
41	16 *cit.*	84	85
42	26 *cit.*	84	85
45	23 *cit.*	78	80
	26 *cit.*	74	73
47	3	XXVI.	XXIV.
52	4	1/2ES	1/2DS
53	18	AM	AM nella perpendicolare MQ.
54	1 *cit.*	47	29
	4	AND	AMD
55	25 *cit.*	100	1. VI.
60	15	ASM	QSM
69	4	BD	BE
	12 *cit.*	119	116
74	14	CG°	BG°
76	14	BE	BC
82	8	in	in più di
89	23 *cit.*	183	184
90	24	settima	sesta
91	1	VF	VE
92	19	IV.°	VI.°
93	12	semiassi	semidiametri
96	14 *cit.*	193	195

Pag.	*ver.*		
98	8 *cit.*	163	168
100	ult. *cit.*	129 *e* 142	140
114	23	RE'	RF'
115	4	MP	MT
119	12	convengono	convergono
124	ult.	direbbe	direbbesi
125	32	P	F
128	3	XXXIV.	XVIII.
132	27 *cit.*	246	233
138	4	EQ	EH
141	13	NR	NCr
142	25	PM'	OM'
146	22	CE	CD
152	12	Cap. II.	Cap. III.
	13	XXX.	XXXV.
156	20	4CS	4CS'
157	5	VC	FC
	22	*maggiore*	*principale*
160	10	FN	FM
161	22	9	29
162	18	*Def.* XII.	*Def.* XV.
163	15	VI	XLIV.
165	4	335	336
	20	CA	RA
169	6	IDEKL	IDEK
	8	PROP.	PROP. XIII.
	15	CL	CF
170	17	2BAMI	2EAMI
173	17	PGF	DEF
174	14	4. *e* 6. II.	4. *e* 3. II.
178	ult.	54	35
180	32 *cit.*	*e* 368	*e* 367
	34 *cit.*	368	366

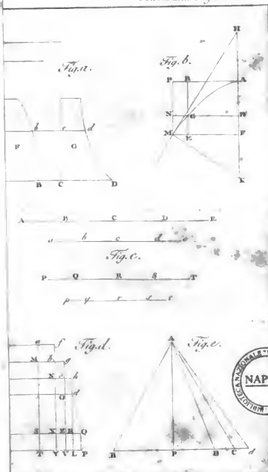


Fig. a.
b c d
F G
B C D
Fig. b.
H
P R A
N G W
M E F
K
A B C D E
a b c d e
Fig. c.
P Q R S T
p q r s t
Fig. d.
e f
M b g
X c h
O d
S X Z R Q
T Y V L P
Fig. e.
A
B P B C d



PRENOZIONI

SULLE

CURVE CONICHE.

§. 1. *Def.* I. La retta AM, che passi per un qualunque punto A della circonferenza del cerchio AEC, e per un altro punto N postovi in sublime, se mai si aggiri intorno a questo punto N, sempre rasente la detta circonferenza, e finchè vi compia un perfetto rivolgimento, dee descrivere una superficie curva, che *superficie conica* suol dirsi. E 'l solido terminato dal detto cerchio, e da quella parte della superficie conica, ch' è tra esso e l' immobile punto N, si dice *cono*: di cui il medesimo cerchio n' è la *base*, e quell' immobile punto il suo *vertice*. *fig.* 1.

§. 2. *Cor.* La retta NM parte dell' altra AM, e posta al di sopra del punto N, dee benanche descrivere una superficie conica nel proposto rivolgimento dell' intera retta AM. Del che più appresso.

§. 3. *Def.* II. L' *asse* del cono CNAE è la retta ND condotta dal vertice di esso al centro della base.

§. 4. *Def.* III. Ed un cono si dirà *retto*, o *scaleno*, secondo che il suo asse sia perpendicolare alla base, o vi s' inclini sotto un angolo qualunque.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

fig. 2. §. 5. *Se dal vertice del cono* CNAE *ad un qualunque punto* F *della superficie conica conducasi la retta NF; questa retta dovrà giacere in sulla superficie proposta.*

Dim. La retta rotante allorchè genera la superficie conica dee passara per tutti que' punti, che potrem concepire in detta superficie. Ella dunque dovrà passare pel punto F, che si è supposto esserne in essa: ed in passandovi ne resterà adattata sulla FN. Ma la retta rotante è sempre in sulla superficie conica, come l'è chiaro per intuizione: dunque quivi dovrà anche starne la retta FN, che vi congiunge il vertice N del cono col punto F della superficie di esso. C. B. D.

§. 6. *Cor.* La congiungente NF, se potraggasi giù dal vertice del cono, dovrà incontrarne la periferia della base in un punto E.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

fig. 2: §. 7. *Se i due punti* F, *e* G *della superficie conica* CNAE, (*i quali non sieno a diritto col vertice* N *del cono*) *si uniscano per mezzo della retta* FG; *questa retta dovrà immergersi nel cono.*

Dim. Si uniscano le rette NF, NG, ed esse pro-

traggansi all'ingiù, sinchè ne incontrino la periferia della base ne' punti E, ed A; e poi si congiunga la retta EA.

Ciò posto, la retta EA, che unisce i due punti E, ed A della periferia della base, cado dentro al circolo CEA[a]: dunque il triangolo ENA, che ha per base la EA, dovrà immergersi nel cono CNAE. Ma la congiungente FG giace nel piano di esso triangolo: dunque ne resterà ancor essa entro il cono CNAE. C.B.D. a. III.

§. 8. *Cor.* Una retta non può adattarsi sulla superficie d'un cono, se non vi combaci con un lato di questo solido.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

§. 9. *Se il cono* CNAE *sia segato col piano* CPQA, *che passi pel suo vertice; la sezione sarà un triangolo.* fig. 2.

Dim. Il proposto piano incontri la circonferenza della base del cono ne' punti A, e C. Egli è chiaro, che la retta rotante nel generar la superficie di tal cono abbia dovuto passare pe'l punto A, che dee esserne in essa, restandone quivi distesa sul piano CPQA. Ma ella è benanche nella superficio conica. Dunque l'è una linea retta la comune sezione del piano segante e di quella parte della superficie conica, ch'è verso A.

Con simil ragionamento si proverà essere una linea retta la comuno sezione del piano segante, e dell'altra parte della soperficie conica, ch'è verso C. Ed essendo benanche una retta l'intersezione del piano CPQA,

e della base del cono, cioè la linea CA; dovrà esser terminata dalle tre rette NA, NC, CA, la parte del piano rinchiusa nel cono. Onde sarà un triangolo tal sezione. C. B. D.

§. 10. *Def.* IV. Se il piano segante passi per lo vertice del cono e per l'asse, la sezione si dirà *triangolo per l'asse.*

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

fig. 3. §. 11. *Se il cono* CNAE *si seghi col piano* LGR *parallelo alla sua base; la sezione sarà un circolo.*

Dim. Si prendano due punti G, ed R nel perimetro di sì fatta sezione; e si uniscano col vertice N per mezzo delle rette NG, ed NR, che protratte
* 6. all'ingiù dovranno incontrare la periferia * della base ne' punti E, ed A. Di poi congiunto l'asse ND si tirino dal punto F, ov' ei ne incontri il piano segante, a' punti R, e G, le rette FR ed FG: e dall'altro punto D ai punti A, ed E, si conducan pure le rette DA, e DE.

E poichè il triangolo DNA sega i piani paralleli CEA, LGR, saran tra se parallele le comuni sezioni
* 16.XI. DA, ed FR*. Onde il triangolo NDA, perchè equiangolo all'altro NFR gli sarà simile, e starà ND : NF :: DA : FR. Per la medesima ragione si proverà esserne ND : NF :: DE : FG. Dunque sarà DA : FR :: DE : FG. Ma la retta DA è uguale alla DE, essendo esse raggi della base del cono: dunque sarà benanche FR uguale ad FG. E dimostrando nello stesso modo, che sia uguale ad FR ogni retta, che dal punto

F si tiri al perimetro della sezione LGR; questa curva sarà un cerchio, di cui il punto F n'è il centro. C. B. D.

§. 12. *Cor.* I. Tutte le sezioni parallele alla base di un cono sono altrettanti cerchi, i cui centri sono allogati nell'asse di tal solido.

§. 13. *Cor.* II. E l'intersezione di ciascheduno di questi cerchi con un triangolo per l'asse, n'è un diametro di esso.

§. 14. *Cor.* III. Che se un piano parallelo alla base del cono CNA non incontri la superficie di questo solido, ma bensì l'altra MNR, che l'è opposta al vertice, con un simile raziocinio si proverà essere un circolo cotesta sezione, e quindi un cono il solido MNRe*. fig. 1.

* 1. e 2.

§. 16. *Def.* V. I due coni CNAE, MNRe diconsi *opposti fra loro.*

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

§. 16. *Se per l'asse, e per l'altezzo del cono scoleno* CNAM *conducasi il triangolo* CNA, *e su questo piano cada perpendicolarmente l'altro* FER, *incontrandolo nella retta* FR, *la qual ne tronchi verso il vertice del cono il triangolo* FNR *simile al detto* CNA *e succontrariamente posto (cioè che sieno gli angoli* NFR, *ed* NRF *uguali ad* NAC, *ed* NCA, *l'uno all'altro); anche la sezione* FER, *che suol dirsi* succontraria, *sarà un cerchio.* fig. 4.

Dim. Prendasi nel perimetro di questa sezione il punto E, e l'altro M nella periferia della base del cono, e da essi conducansi le EI, ed MD perpendi-

colari al piano CNA. Queste rette saranno parallele
* 6. XI. fra loro*, e dovranno cadare sulle FR, e CA rispettivamente. Inoltre condotta per lo punto I la retta GIB parallela alla CA base del triangolo per l' asse, si distenda per le due rette EI, e GB il piano GEB, che
* 10 XI. sarà parallelo al piano CMA*, e sarà quindi un cer-
* p. prec. chio la sezione GEB*, di cui la GB n'è un diametro.

Ciò posto, l' angolo esterno FGI delle parallele GI, e CD segate dalla terza FC è uguale all' interno GCA, e ad esso opposto. Ma l' angolo GCA è per ipotesi uguale a BRI. L'è dunque FGI uguale a BRI. Con che i due triangoli FGI, ed IBR, avendo ancora uguali gli angoli GIF, BIR opposti al vertice, saranno simili, e starà GI : IF :: IR : IB. Onde il rettangolo di GI in IB sarà uguale a quello di IF in IR. Ma il rettangolo di GI in IB pareggia il quadrato della retta EI calata nel semicerchio perpendicolare al suo
* 35.III. diametro GB*. L'è dunque anche l' altro rettangolo di FI in IR uguale al medesimo quadrato di EI. Inoltre la FR si divida in parti uguali nel punto O, e si unisca la OE, ed aggiungasi OI* tanto ad FIR, che
* 5. II. ad EI*; n'emergerà RO* * uguale ad OE* *: e quindi
* 47. I. RO uguale ad OE. Lo che sempre dimostrandosi la sezione FER, al par della precedente sarà un circolo. C. B. D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

§. 17. *Se nella base* CTA *del cono* CNAT *conducasi la corda* TPD *perpendicolare alla* CA *base del triangolo* CNA *per l' asse, e per tal corda poi si distenda il piano* TQD *comunque inclinato alla base del cono, e che non passi per lo vertice* N *di esso; un tal piano formerà nel cono una sezione curvilinea.* fig. 5.

Ed in questa sezione ogni corda SRE, *che sia parallela a quella corda della base del cono, cioè alla* DT, *resterà divisa in parti uguali dal detto triangolo per l' asse.*

Part. I. Prendansi nel perimetro della proposta sezione due qualunque punti T ed e, e comunque tra lor vicini: e poi si congiunga la T*e*. Questa retta non dovrà passare per lo vertice del cono: altrimente vi passerebbe benanche il piano TQD, contro la supposizione: ond' ella dovrà cadere entro il cono CNAT. Ma la parte TH*e* del perimetro di quella sezione è sulla superficie conica, e vi tiene i medesimi termini della retta T*e*. Dunque la linea THe dee esserne un arco sotteso dalla retta T*e*: e quindi sarà una figura curvilinea la proposta sezione.

Part. II. Per lo punto R, ove la retta SE incontra il piano CNA, si tiri GRB parallela a CA, e si distenda per SE, e GB il piano GEBS, che sarà parallello alla base del cono, e quindi un cerchio la sezione GEB*, di cui n'è GB un diametro, e la sua circonferenza, come l' è di per se chiaro, passerà pe' punti S, ed E. * 11.

Ciò posto, le due rette TP, PA sono respettivamente parallele ad RE, ed RB. Dunque l'angolo IPA
* 10.XI. sarà uguale ad ERB*. E quindi essendo il primo per supposizione retto, sarà retto benanche l'altro ERB. Dunque il diametro GB del circolo GEB tagliandone ad angoli retti la corda SE dovrà segarla in parti uguali in R. E quindi la SE, ch'è anche corda della curva DQT, resterà divisa per metà nell'incontrarne il triangolo ANC per l'asse, o la retta PQ, ch'è in esso e nel piano segante EQS. C.B.D.

§. 18. *Def.* VI. La comune sezione di una curva conica, e di quel triangolo per l'asse, che n'è bisognato per la genesi di essa, cioè la retta PQ, si dice *diametro di una tal curva.* E *le sue ordinate* son quelle corde tra loro parallele, ch'ei ne divide in due parti uguali.

§. 19. *Def.* VII. Inoltre ciascuna metà di un'ordinata dee dirsi *semiordinata.* E quando diremo *si ordini al diametro una retta per un dato punto*, vuol intendersi, che per quel puuto debba distendersi un'ordinata alla curva, o una semiordinata. Finalmente *il vertice di una sezione conica* è quel punto, ove il diametro di essa la incontra; come sarebbe nella *fig.* 5. il punto Q.

§. 20. *Def.* VIII. L'*Asse di una sezione conica* è'l diametro, che insiste ad angoli retti alle sue ordinate.

§. 21. *Def.* IX. La parte del diametro, ch'è tra 'l vertice della sezione, ed una di lei ordinata, suol chiamarsi *ascissa* corrispondente ad essa ordinata. E l'ascissa, e la sua semiordinata considerate insieme chiamansi *coordinate*.

Così le rette QR, e Q*r* son le ascisse corrispondenti alle semiordinate RE, ed *re*: e le due QR, ed RS ne son le coordinate.

§. 22. *Cor.* Se pel punto medio di un' ordinata di una curva conica si distenda nel triangolo per l' asse la parallela alla base di esso; *il rettangolo delle parti di questa parallela, che restano dall' una e dall' altra parte di quel punto, sarà uguale al quadrato della metà della detta ordinata.* Cioè a dire sarà il rettangolo di GR in RB uguale ad RE².

§. 23. *Def.* x. La sezione DQT si dirà *Parabola*, se il suo diametro QP sia parallelo a quel lato del triangolo per l' asse, ch' è opposto a tal sezione, cioè al lato NC. *fig.* 5.

§. 24 *Def.* xi. E si chiamerà *Ellisse* quella sezione conica, il cui diametro incontri sotto al vertice del cono quel lato opposto del triangolo per l' asse, qual sarebbe la curva QELD. *fig.* 6.

§. 25. Ma questa potrebb' essere un cerchio, se il cono fosse scaleno, e quivi *succontraria** la detta sezione. E tranne questo caso, una tal sezione, che torna in se stessa, n' è diversa dal cerchio. * 16.

§. 26. *Def.* xii. Finalmente si dirà *Iperbole* la sezione DQT, se 'l suo diametro QP incontri sopra del vertice del cono il lato opposto del detto triangolo per l'asse. E se il piano segante DQT producasi insino al cono opposto FNL, ei formerà in questo cono un' altra iperbole ML*r*. E le due iperboli DQT, ML*r* si diranno *Sezioni Opposte*. *fig.* 7.

§. 27. *Cor.* Tanto nell' ellisse, che nelle iperboli opposte contengonsi due vertici, cioè i punti Q, ed L.

§. 28. *Def.* xiii. La retta QL, che unisce i due vertici Q ed L dell' ellisse QELD, o delle sezioni opposte DQT, ML*r*, dicevasi *lato transverso* da' Geometri antichi. *fig.* 6. e 7.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

fig. 8. §. 29. *Se da un qualunque punto* M *del diametro* QP *di una curva conica gli si elevi la perpendicolare* MT *terza proporzionale in ordine all' ascissa* QM, *ed alla semiordinata* NM, *che corrispondono al detto punto; l' estremo di quella perpendicolare starà sempre in una retta data di posizione* (*), *che si dirà* regolatrice.

Dim. Da un qualunque altro punto *m* del diametro QP si alzi la *mt* perpendicolare alla QP, e terza proporzionale dopo le coordinate Q*m*, ed *mn*. E poichè il quadrato di NM per ipotesi è uguale al rettangolo QMT, ed ei fu dimostrato benanche uguale all' al-
* 22. tro rettangolo RMB *, saran tra se eguali cotesti due rettangoli; e reciprocandosi le loro basi, ed altezze starà QM : MB :: RM : MT. In simil modo si dimostra dover essere Q*m* : *mb* :: *rm* : *mt*. Ma sono uguali le due prime ragioni di queste due analogie, cioè quelle di QM ad MB, e di Q*m* ad *mb*, pe' triangoli simili QMB, Q*mb*. Dunque saran pure uguali le altre due ragioni: cioè a dire dovrà essere RM : MT :: *rm* : *mt*, e permutando RM : *rm* :: MT : *mt*. Ciò posto, nell' ellisse e nell' iperbole, ove il diametro di ciascuna di queste sezioni incontra in P il lato opposto del trian-

(*) Una retta è data di posizione, se mai passi per due punti dati. E questi due punti sarebber nel nostro caso i due estremi di coteste perpendicolari.

golo per l'asse, sta RM : *rm* :: PM : P*m*. Dunque dovrà esser benanche PM : P*m* :: MT : *mt*. Ed i punti T, e *t* saranno allogati nella retta PT data di posizione, che passa pe' punti P, e T.

Ma nella parabola la RM è uguale alla *rm*, per esser parallele le due rette QP, ed RP. Onde dovrà esserne la MT uguale alla *mt*; e quindi i due punti T, e *t* dovran giacere in una parallela alla QP (*) data di posizione. C. B. D.

§. 30. *Cor.* Dunque la *regolatrice* nella parabola è parallela al diametro di essa. Ed in ciascheduna delle altre due sezioni ella ne incontra il diametro nell' altro vertice P, ch'è opposto a quello, di dove ne abbiam computate le ascisse.

§. 31. *Def.* XIV. *Parametro* di una sezione conica è la perpendicolare QA elevata al diametro dal vertice Q della sezione, e distesa insino alla *regolatrice* AP. Questo parametro dicevasi *lato retto* da' Geometri Greci.

§. 32. *Scol.* Dal proposto teorema, che manca nelle altre instituzioni, potrem ritrarne i seguenti vantaggi didascalici. I°. Con una medesima agevolissima nozione verran definiti non solo i parametri de' diametri primitivi delle tre curve coniche, ma que' parametri altresì, che vi si avran poi a considerare. II°. Da

---

(*) Questa nuova proprietà delle curve coniche, o nuovamente ravvisata nell' idea della *regolatrice*, non solamente si appartiene alla parabola, all' ellisse, ed all' iperbole, ma benanche al cerchio, ed al triangolo. Ed ella potrebbesi generalmente enunciare nel seguente modo. *Ciascuna semiordinata d' una qualunque sezione conica è media proporzionale tra le coordinate di una retta data di posizione.*

questo teorema dovran discendere immediatamente le proprietà caratteristiche delle dette curve. III°. E da esso potrem dedurne una proprietà generale di queste curve, ed è, che *ogni semiordinata vi sia media proporzionale tra l' ascissa computata dall' un vertice della sezione, e tra la corrispondente ordinata nella regolatrice, la quale passi per l' altro vertice.* Intanto vuol sapersi, che quest' ordinata non è che la perpendicolare elevata alla detta ascissa dall' estremo di essa e prodotta sino alla regolatrice. E dee avvertirsi, che nella parabola cotesta regolatrice debb' esserne parallela diametro.



DELLE SEZIONI CONICHE
LIBRO PRIMO.

DELLA PARABOLA.

CAP. I.

DE' DIAMETRI DELLA PARABOLA.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

§. 33. *Nella parabola* NQB *il quadrato di una* fig. 9. *qualunque semiordinata* NM *è uguale al rettangolo del parametro* AQ *nell' ascissa* QM, *che corrisponde alla detta semiordinata.*

Ed i quadrati di due qualunque semiordinate NM, *ed* $n\,m$ *son proporzionali alle loro corrispondenti ascisse* QM, Qm.

Dim. Part. I. In qualunque sezione conica il quadrato della semiordinata NM pareggia il rettangolo della sua ascissa QM nella MT, che si eleva dal punto M perpendicolarmente alla detta ascissa, e si disten-

* 30. de insino alla regolatrice AP*. Ma nella parabola cotesta regolatrice è parallela al diametro QM: onde la detta perpendicolare dee uguagliarne il parametro AQ. Dunque sarà NM² uguale a QM in AQ.

Part. II. Ed essendo i due rettangoli di QM in AQ, e di Q*m* in AQ, per avere la medesima altezza AQ, nella ragione delle loro basi QM, e Q*m*; anche i quadrati delle semiordinate NM ed *nm*, che si son dimostrati pareggiarne qua' due rettangoli respettivamente, dovranno essere nella ragion delle QM, e Q*m*, cioè come le loro corrispondenti ascisse QM, e Q*m*. C. B. D.

§. 34. *Cor.* Nella parabola al crescer delle ascisse crescon benanche le loro sottoposte ordinate: sebbene sien queste non già nella ragion di quelle, ma nella sudduplicata. Dunque l' è forza, che i rami curvilinei di una tal curva divergano continuamente fra loro, e dal diametro ch' è in mezzo ad essi. E lo stesso dee dirsi di ogni parallela al diametro condottagli entro l' anzidetta sezione.

§. 35. *Def.* 1. La *Tangente* di una sezione conica è una retta, che in un sol punto incontra una tal curva, e ne ha fuori di questa tutti gli altri suoi punti. Cotesta Tangente si dirà poi *verticale*, o *laterale*, secondo che l' avrem condotta dal vertice della sezione, o in un altro qualunque punto del perimetro di essa (*).

(*) Questa definizione nell' adattarsi alle curve di un grado più elevato ha bisogno di alcune limitazioni.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

§. 36. *Nella parabola se l'ascissa* AM, *che corrisponde all'ordinata* NG, *producusi sul vertice* A, *sinchè la parte protratta* AP *adegui la medesima ascissa: io dico esser tangenti di tal curva le due rette, che uniscono l'estremo* P *di quella parte protratta con ciascun estremo della detta ordinata.* fig. 10.

E l'angolo mistilineo ANP *compreso dalla parabola, e dalla tangente non potrà mai dividersi per una retta.*

Dim. Par. I. Nella retta PR prendasi ove ne piaccia il punto R, e da esso si conduca la BR parallela alla NM, incontrandone la parabola in T. Sarà BR : NM :: PR : PM, a cagion de' triangoli simili BPR, NPM: e quindi $BR^2 : NM^2 :: RP^2 : PM^2$. Ma per la natura della parabola NAG sta NM^2 a TR^2, come AM ad AR^2, o come il rettangolo di MA in 4 AP all'altro * 33.
di RA in $4\,AP^2$. Dunque sarà, *ex aequo*, BR^2 : * 1. VI.
$TR^2 :: RP^2 : RA \times 4AP^2$. Ma l'è poi RP^2 maggiore * 22. V.
del rettangolo di RA in $4AP^2$. Dunque sarà BR^2 mag- * 8. II.
giore di TR^2; e quindi sarà BR maggiore di TR; e 'l punto B dovrà cadere fuori della curva NAG. E dimostrando in simil modo che ogni altro punto della PB, tranne il solo N, stia fuori della detta curva, la PB per la definizione prec. sarà tangente della parabola NAG. E lo stesso varrebbe per l'altra retta, che ne unisca i punti P, e G.

Part. II. S'è possibile, la retta N*p* divida l'angolo ANP del contatto, ed ella ne incontri la PA in

un punto *p* sottoposto all' altro P. In tal supposizione tolgasi dal diametro AR l' ascissa *Am* uguale alla *pA*, ed ordinatavi per *m* la *mn*, si unisca la retta *pn*. La congiunta *pn* per la Parte I. di questo teorema sarà tangente della Parabola in *n*: e prodotta all' in giù, non potendo cadere entro la curva, dovrà necessariamente incontrare la NP, e molto più la N*p*. Dunque le due rette N*p*, ed *np* dovran segarsi in due punti. Lo che ripugna. C. B. D.

§. 37. *Cor. I.* In questo teorema contiensi quel géometrico artificio, che convien usare nel condurre la tangente ad un punto dato della parabola, il qual non sia il vertice della detta sezione.

§. 38. *Cor. II.* E se voglia condursi la tangente alla parabola nel vertice di tal curva, basterà menarne per esso la parallela ad una sottoposta ordinata. Imperciocchè, se mai tal retta suppongasi cadere dentro alla curva; ella ne sarà un' ordinata. E 'l diametro che dovrebbe passare per lo punto medio di essa, qui ne passerebbe per un suo estremo, ch' è un assurdo.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

fig. 11. §. 39. *Se dentro alla parabola* LANQ *conducasi, ove ne piace, la retta* LQ *parallela alla tangente laterale* NP; *ella dovrà segare amendue i rami di tal curva, che son d' intorno al contatto* N, *cioè i rami* N*n*Q, NAL.

Dim. Prendasi nella parabola LANQ un punto *n* inferiore al proposto punto N del contatto, ed ordinata par *n* la *nm* al diametro A*m*, si protragga l'ascis-

sa Am in sul vertice, e sinchè la parte prodotta Ap, ne uguagli quell' ascissa, e poi congiungasi la pn. Sarà chiaro esserne la congiunta pn tangente della parabola in n*. E s' intenderà di leggieri, che la stessa pn abbiane incontrata la proposta tangente PN in un punto inferiore al contatto N: e ch' ella verso la stessa parte debba poi segnarne la LQ, che si è supposta parallela alla PN. * 36.

Ciò promesso, tutti i punti della tangente pn, tranne il solo n, son fuori la curva LANQ*. Dunque la LQ o dovrà incontrare la pn nel punto n, ch' è nella curva; o in un altro fuori di essa, avendone dovuto anteriormente incontrare il perimetro. Ed in amendue questi casi ben s' intende, che la LQ ne seghi il ramo parabolico NnQ. Ma è poi evidente, che la stessa retta LQ debba segarvi l' altro *ramo parabolico* NAL. Dunque la proposta LQ incontra la parabola in due punti (*). * 35.

§. 40. *Def.* II. Se per lo contatto d' una tangente laterale della parabola distendasi la parallela al diametro, la quale vi formi un parallelogrammo nell' incontrarne la tangente verticale ed una qualunque semiordinata ad esso diametro; una tal figura, si dirà ***quadrilineo corrispondente*** **all' estremo della detta semiordinata.**

(*) Questa verità, che manca nelle Istituzioni de' Conici, dee premettersi per l' intelligenza della *Propos. V.*... Ma nel §. 326. del Tratt. Anal. delle curve coniche si vedrà, che le radici di un' Equazione quadratica vi mostrino gl' incontri della retta *LQ* colla Parabola *LANQ*.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

fig. 12. §. 41. *Se da un qualunque punto* C *della parabola* AQC *si tirino le due rette* CB, CN, *l'una parallela alla tangente verticale* AP, *e l'altra alla laterale* QS, *ed esse protraggansi, finchè ne incontrino in* B *ed* N *il diametro* AB *della sezione; il triangolo* CBN *formato da quelle rette uguaglierà il parallelogrammo* PTBA *corrispondente al detto punto.*

Dim. I due triangoli QMS, CBN han coincidenti i lati SM, ed NB: e gli altri lati di essi, come ne appare, son respettivamente paralleli tra loro. Dunque tali figure saranno equiangole, e quindi simili: ed esse saran poi in duplicata ragione de' loro lati omolo-
19. VI. ghi. Vale a dire sarà QMS : CBN :: $MQ^2 : BC^2$. Ma
* 33. per la natura della parabola sta $MQ^2 : BC^2$ :: MA :
* 1. VI. BA* :: MAPQ : BAPT*. Dunque sarà pure QMS : CBN :: MAPQ : BAPT. Ma il triangolo QMS adegua il parallelogrammo MAPQ: poichè queste due figure son fra le medesime parallele MS, e PQ, e la prima di esse ha una doppia base dell' altra, cioè la MS doppia di
* 36. MA*. Dunque sarà benanche il triangolo CBN uguale al parallelogrammo PTBA. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

§. 42. *La retta* QD *che da un qualunque punto* Q *del perimetro parabolico* AQC *conducesi parallela al diametro* AB *di una tal sezione, divide in due parti uguali ciascuna delle corde* AC, FH, *ec., che ne son parallele alla tangente nel detto punto* Q. *Onde tal retta ne sarà un altro diametro, che ha le dette corde per ordinate.* fig. 18.

Dim. Cas. 1. La corda AC incontri il diametro AB della sezione nel vertice A: e per lo punto C, ch' è l' estremo inferiore di essa corda, si ordini la CB al detto diametro. Sarà, per la prec. prop., il triangolo CAB uguale al parallelogrammo BAPD. Dunque tolto da essi il comune trapezio DLAB, dovrà restarne il triangolo CDL uguale all' altro APL. Ma questi triangoli sono anche simili: dunque dovran pareggiarsi i loro lati omologhi CL, ed LA; onde la QM divide in parti uguali la corda AC nel punto L.

Cas. 2. Inoltre la corda HF incontri il diametro AB della sezione nel punto O sotto il vertice di essa. Da' suoi estremi F, ed H si conducan le ordinate FE, ed HK al detto diametro AB. Sarà per lo precedente Teor. il triangolo FEO uguale al parallelogrammo EAPG. Dunque aggiungendovi di comune il parallelogrammo KEGM, ne risulterà lo spazio FGMKO uguale al parallelogrammo KAPM, o al triangolo OKH, che gli è uguale*. Il perchè se dagli uguali spazj OKH, FGMKO ne torremo il comune trapezio MNOK, vi rimarrà il triangolo HMN uguale al suo simile FGN. Dunque i loro lati omologhi HN, ed FN saranno uguali, e la * 41.

corda FH ne sarà divisa in due parti uguali dalla QM.

fig. 12. Cas. 3. Finalmente la corda EC incontri il diametro AB della sezione nel punto N oltre il vertice di essa. Sarà chiaro per la prec. prop. che condotte al diametro AB le ordinate CB, ED da' termini di essa corda, debban essere i triangoli CBN, EDN respettivamente uguali a' parallelogrammi BAPT, DAPR. Dunque sarà il trapezio CEDB differenza di que' triangoli uguale al parallelogrammo TBDR differenza di questi parallelogrammi. E quindi togliendo da queste grandezze uguali il comun pentagono TLEDB, ne rimarrà il triangolo CTL uguale al suo simile LRE. E dovendone esser uguali i lati omologhi CL, LE di essi triangoli, la QT dovrà dividere per metà la corda EC.

fig. 13. Dunque la QM può aversi per un altro diametro della parabola, avente per sue ordinate le corde AC, FH, ec. parallele alla QS tangente di tal curva in Q. C. B. D.

§. 43. *Cor.* I. La parabola è suscettiva d' infiniti diametri, che vi saran condotti da ciascun punto di tal curva paralleli al *diametro primitivo*, cioè *a quello, che ne vien dalla genesi di essa esibito*.

§. 44. *Cor.* II. Nella parabola i punti medj delle corde parallele ad una tangente di essa, e 'l contatto di questa retta son posti per dritto, e trovansi allogati in una parallela al diametro primitivo. Dunque una retta, che unisca due di questi punti, o che conducasi per uno di essi parallela al diametro primitivo, dovrà passarne pe' rimanenti.

§. 45. *Cor.* III. E perciò la retta, che vi congiunga i punti medj di due corde parallele, sarà un diametro della curva. Ed una corda perpendicolare a quella congiungente sarà un' ordinata dell' asse. Ond' *ei potrà esibirsi col solo condurre dal punto medio di quest' ordinata la parallela all' azidetta congiungente.*

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

§. 46. *I quadrati delle semiordinate* CL, HN, *e* *fig.* 13.
delle intere ordinate al diametro QM, *sono proporzionali alle loro corrispondenti ascisse* QL, QN.

Dim. La retta QP a cagion del parallelogrammo QPAX adegua l'altra AX: ed è poi per la Prop. II. la retta SA uguale alla medesima AX: dunque saranno uguali le due QP, ed AS: ed i triangoli QZP, AZS, che veggonsi avere le condizioni della 26. El. I., dovran pareggiarsi. Il perchè, aggiongendo a'detti triangoli il sottoposto pentagono DQZAB, ne risulterà il parallelogrammo DPAB uguale al trapezio SQDB. Ma un tal parallelogrammo si è dimostrato uguale al corrispondente triangolo ACB. Dunque sarà il trapezio SQDB uguale al triangolo ACB: e tolto da essi il comune spazio DLAB, dovrà restarne il triangolo LCD uguale al parallelogrammo LQSA.

In simil modo può dimostrarsi, che sia il triangolo HNM uguale al parallelogrammo NQSO. Dunque i due triangoli LCD, NHM saran proporzionali a' parallelogrammi LQSA, NQSO. Ma que' triangoli, avvegnacchè simili, sono come i quadrati de' loro lati omologhi CL, HN: e questi parallelogrammi per avere la medesima altezza sono proporzionali alle loro basi QL, e QN. Dunque sarà $CL^2 : HN^2 :: QL : QN$; cioè i quadrati delle semiordinate del diametro QM, e con ciò quelli dell'intere ordinate sono come le corrispondenti loro ascisse. C. B. D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

fig. 14. §. 47. *Nella parabola* QFA, *se da un qualunque punto* L *del diametro* QN *gli si elevi la perpendicolare* LI *terza proporzionale dopo l' ascissa* QL, *e la semiordinata* LA *corrispondenti a detto punto*; *l' estremo* I *di tal perpendicolare sarà allogato in una parallela al detto diametro data di posizione*. *Questa retta si dirà benanche* regolatrice *della parabola*.

Dim. Un' altra retta NY anche perpendicolare al diametro QN in un altro punto N sia terza proporzionale dopo le coordinate QN, ed NF. Saranno i quadrati delle LA, ed NF respettivamente uguali a' rettangoli di QL in LI, di QN in NY. Ma quei quadrati son proporzionali alle ascisse QL, e QN. Dunque saranno i rettangoli di QL in LI e di QN in NY, come le loro basi QL e QN: ond' essi dovranno avere uguali le altezze LI ed NY, ed i punti I, ed Y dovran trovarsi in una parallela alla QN. C.B.D.

§. 48. *Def.* 111. La perpendicolare, che si eleva ad un qualunque diametro della parabola dal vertice di esso, e si distende insino alla regolatrice, si dirà *parametro di tal diametro*. E si chiamerà *parametro principale* quello che all' asse ne appartiene.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

§. 49. *Il quadrato di ciascuna semiordinata ad un qualunque diametro della parabola è uguale al rettangolo della sua ascissa nel parametro.*

La dimostrazione di questo Teorema traluce in quella del precedente, e nell' addotta definizione.

§. 50. *Cor.* Questa verità, che nel I°. teorema erasi proposta per lo diametro primitivo della parabola, quì scorgesi universalizzata per tutt' i diametri di una tal curva. Ed in conseguenza di un tal principio, potrà stabilirsi fra le altre cose la verità seguente (*).

§. 51. *Cor.* II. Cioè *se l' ascissa corrispondente ad un' ordinata di un qualunque diametro si protragga fuori la curva finchè la parte protratta pareggi quell' ascissa; saran tangenti di essa curva le rette, che vi uniscono l' estremo della parte protratta con ciascun estremo della detta ordinata.* Ma il converso Teorema sarà esibito nella Prop. X.

(*) Questa verità, che suol condurci per un sentiero di luce, quando geometricamente si rileva, diventa di un malagevol conseguimento nel volerla per le vie analitiche ricercare. Imperocchè a tal uopo ne abbisognerebbe il passaggio da un sistema di coordinate oblique ad un altro di coordinate anche oblique, che ne arrestò i passi all' Eulero E se vogliasi agevolare un tal passaggio col supporne con alcuni Analisti, che il diametro sia l' asse della parabola, o retto al cono, donde si generi questa curva, si renderà molto particolare cotesta genesi, e poco decente all' Analisi moderna.

§. 52. *Cor.* III. Il parametro di ciascun diametro della parabola potrebbesi definire esser *la terza proporzionale in ordine ad un' ascissa, che vi si prenda, e la semiordinata corrispondente*. Ed esso potrà facilmente esibirsi, con quell' eleganza, che l' arte ne prescrive.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

fig. 15. §. 53. *Nella parabola* MAO *il parametro di qualunque diametro* MG *supera quello, dell' asse* AT *per lo quadruplo dell' ascissa* AN, *che vi determina nell' asse l' ordinata condottagli dal vertice di quel diametro.*

Dim. Al punto M della proposta parabola conducasi la tangente DM*, la quale ne incontri l' asse nel
* 36. punto D. Sarà la DA uguale alla AN. Imperocchè, se ciò si neghi, si prenda nella AD l'altra A*d* uguale ad AN. La congiunta M*d* sarebbe tangente della parabola
* 36. nell' istesso punto M*, dividendone l' angolo AMD del contatto, ch' è un assurdo. Quindi è, che menata per lo punto A la retta AR parallela alla tangente MD, debba esser la MR uguale alla AN, essendone amendue uguali alla DA.

Ciò posto per la natura di tal curva il quadrato di MN adegua il rettangolo di AN, o della sua ugua-
* 33. le MR in AP, che sia il parametro dell' asse*. E per la 4. Elem. II. il quadrato di DN, ch' è quadruplo del quadrato di AN, l' è uguale al rettangolo di MR in 4AN. Dunque il quadrato di MD, che uguaglia que' dua quadrati, sarà uguale a' due rettangoli di MR in AP, e di MR in 4AN, cioè al solo rettangolo

di MR in AP+4AN. Ma il quadrato di AR semiordinata al diametro MG è uguale al rettangolo della sua ascissa MR nel parametro MQ. Dunque essendo uguali i quadrati delle MD, ed AR, saranno anche uguali i rettangoli, che ad essi abbiam dimostrati uguali, cioè di MR in AP+4AN, e di MR in MQ. Onde dovrà essere AP+4AN uguale ad MQ. C. B. D.

§. 54. *Cor.* Nella parabola il minimo parametro è quello, che conviensi all' asse. E due diametri, i cui vertici sieno equidistanti dall'asse, dovranno avere parametri uguali.

§. 55. *Def.* v. Se un diametro della parabola si produca oltre il suo vertice, finchè ne incontri una tangente di tal curva, si chiamerà *sottangente* la parte del diametro, che resta tra quell' incontro, e l' ordinata per lo contatto.

§. 56. *Def.* vi. E conducendo la perpendicolare MQ ad una tangente MD dal punto del contatto, e distendendola insino all' asse AQ, vi si dirà *sunnormale* quella parte dell' asse, che tramezza la detta normale, e l' ordinata condottagli per lo contatto, cioè la NQ. *fig.* 16.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

§. 57. *Nella parabola la sottangente qualunque sia il diametro, ove la prendiamo, è sempre doppia dell' ascissa, che corrisponde all' ordinata per lo contatto.*

E la sunnormale, che ha luogo nel solo asse, è metà del parametro principale.

Dim. Part. I. Sia MQ un qualunque diametro della parabola FAQH, ed una tangente AP di questa *fig.* 13.

curva lo incontri in P. Per lo punto A del contatto di tal retta, si tiri AL parallela a QZ tangente della parabola in Q: dico dover esser la sottangente PL doppia dell' ascissa QL. La dimostrazione di questa verità può farsi come quella, ch' è nel principio della precedente dimostrazione.

fig. 16. *Part. II.* Sia NQ una sunnormale della parabola MAO, sarà il quadrato di MN, a cagion dell' angolo retto QMD uguale al rettangolo di QN in ND. Ma lo stesso quadrato di MN è anche uguale al rettangolo di NA nel parametro AP, per la natura della parabola. Dunque saranno uguali i due rettangoli di QN in ND, e di NA in AP. Onde dovrà stare NA : ND :: QN : AP. Ma l' ascissa NA è metà della sottangente ND*. Dunque sarà benanche la sunnormale QN metà del parametro principale AP. C.B.D.

* part. 1.



CAP. II.

Delle Tangenti, e delle Seganti della Parabola.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

§. 58. *Dato il punto* P *fuori la parabola* ABC, *fig.* 17. *condurle da esso una tangente.*

Costruz. Dal dato punto P si tiri la PL parallela al diametro primitivo BD della parabola ABC. Dovrà quella retta incontrarne questa curva. Poichè condotta per lo punto P la PV parallela alle ordinate del diametro BD, ed insin che lo incontri, vi si tolga l' ascissa BY terza proporzionale in ordine al parametro del detto diametro, ed alla PV, e si ordini la QY. Sarà chiaro esser questa retta parallela alla PV; e le sarà benanche uguale, per esser QY media proporzionale tra 'l parametro anzidetto e la BY, al par della PV. Dunque la proposta parallela, che dee passare per l' estremo della QY*, dovrà cadere sulla parabola. * 33. I.
Inoltre si tiri al punto Q di questa curva la tangente QN, e presa la QL uguale alla PQ, si distenda per lo punto L la retta AC parallela alla QN, che dovrà incontrar la parabola ne' punti A, e C*. Finalmente si * 39. unîscano le rette PC, PA; dico esser queste le due tangenti condotte alla parabola dal dato punto P.

Dim. Imperocchè per costruzione la PL è doppia

della QL: dunque tanto la PC, che la PA dovrà es-
* 36. ser tangente della parabola*. C.B.D.

§. 59. *Cor.* La retta PL, che unisce il concorso delle due tangenti AP, e CP della parabola AQC col punto medio L della retta AC fra contatti, n'è il diametro di questa corda. Imperocchè se il diametro di AC fosse Lp, sarebbe dupla dell'ascissa Lq tanto la
* 58. sottangente Lp, che l'altra Lr*. Lo che ripugna.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

fig. 18. 19. §. 60. *Se le due corde* DA, BN *della parabola* ADN *s'interseghino in* C *dentro a questa curva, o fuori di essa; i rettangoli* DCA, BDN *de' loro segmenti saranno proporzionali a' parametri* GQ, IP *de' diametri* GM, IL, *di cui son ordinate le suddette corde.*

fig. 18. *Dim. Caso I.* Dal punto C dell'intersezione di tali corde, il quale stia entro la parabola, si meni la CF parallela al diametro GM, e dalle due CF, e CM si compia il parallelogrammo CMHF. E poichè i quadrati delle semiordinate DM, ed FH sono respettivamente uguali a' rettangoli delle loro ascisse GM, GH
* 49. nel parametro GQ*, sarà la differenza di quei quadrati uguale alla differenza di questi rettangoli. Ma la differenza de' quadrati delle rette DM ed FH, o delle
* 5, II. DM ed MC, è uguale al rettangolo DCA*: e la differenza de' rettangoli di GM in GQ e di GH in GQ è il rettangolo di MH, o di CF in GQ. E dimostrando in simil guisa dover essere il rettangolo BCN uguale a quello, che si farebbe dalle due FC ed IP, sarà il rettangolo DCA all'altro BCN, come

il rettangolo di FC in GQ a quello di FC in IP, cioè come GQ ad IP.

Caso II. Dal punto C dell' intersezione delle dette corde, il quale stia fuori della parabola ADN, si conduca la CF parallela al diametro GM, che dovrà in un punto F incontrare una tal curva. Inoltre per F si tiri la semiordinata FT al diametro IT: saranno i quadrati di FT, e di BL respettivamente uguali a' rettangoli di TI in IP, e di LI in IP. E quindi la differenza de' quadrati di CL, e di BL, cioè il rettangolo NCB* pareggerà il rettangolo di LT, o di CF in IP. Similmente può dimostrarsi il rettangolo DCA essere uguale all'altro di GQ in CF. Dunque siccome i rettangoli di CF in IP, e di CF in GQ sono nella ragione di IP a GQ, così gli altri rettangoli NCB, DCA saranno nella ragione de' parametri IP, e GQ. C. B. D. fig. 19. * 6. II.

§. 61. *Cor. I.* Se una corda HK della parabola HMK interseghi le due ordinate AB, CD di un qualunque diametro di tal curva; *i rettangoli de' segmenti di queste ordinate saranno proporzionali a' corrispondenti rettangoli de' segmenti di quella corda.* Cioè a dire dovrà stare AEB : CFD :: HEK : HFK. fig. 20.

§. 62. *Cor. II. E se la detta corda ne incontri i diametri* MR, PS *della parabola; i rettangoli de' segmenti di essa corda saran proporzionali alle parti di que' diametri, da essa troncate verso de' loro vertici.* Cioè dovrà esserne MN : PQ :: HNK : HQK. Imperocchè dal I.° caso si deduce, che sia AMD : ACD :: MG : CF. fig. 18.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

fig. 21. §. 63. *Se dal punto* C *esistente fuori la parabola* ABN *cadono in questa curva la tangente* CA, *e la segante* CN, *che non vi sia parallela ad un diametro; il quadrato della tangente* CA *starà al rettangolo della segante* CN *nella sua parte esterna* CB, *come il parametro del diametro, che passa per lo contatto* A, *al parametro di quell' altro diametro, che avrebbe per ordinata la parte interna* BN *di quella segante.*

Dim. Dal punto C si meni la CF paraliela al diametro AD della parabola: e per lo punto F, ove quella ne incontri la detta curva, conducasi la FE parallela alla tangente CA. Sarà il quadrato della semiordinata FE uguale al rettangolo della sua ascissa AE nel parametro del diametro AD: cioè, a cagion del parallelogrammo ACFE, sarà il quadrato della tangente AC uguale al rettangolo di CF nel parametro di AD. Ma il rettangolo NCB si è dimostrato uguale all' altro di CF nel parametro di quel diametro, che avrebbe la NB per ordinata. Dunque sarà il quadrato della tangente CA al rettangolo NCB, come il rettangolo di CF nel paramentro di AD all' altro della stessa CF nel parametro del diametro, cui n' è ordinata la NB, cioè come il primo di questi due parametri all' altro. C. B. D.

§. 64. *Cor.* 1. Si conduca dal medesimo punto C l' altra tangente CG alla parabola ABN. Sarà il rettangolo NCB al quadrato di CG, come il parametro del diametro, cui n' è ordinata la NB al parametro del

diametro, che passa per lo contatto G. Dunque per equalità ordinata saranno *i quadrati delle tangenti menate dal punto* C *alla sottoposta parabola* ABN, *come i parametri de' diametri tirati pe' contatti loro*.

§. 65. *Cor.* II. Se s' interseghino entro la parabola, o fuori di essa due ordinate di due diametri, che siano ugualmente distanti dall' asse; i rettangoli de' segmenti di coteste ordinate saranno tra se uguali: e pe' quattro punti, ov' esse segan la curva, potrà passarvi un cerchio*. *35.III.

§. 66. *Cor.* III. E se una delle dette ordinate incontri la tangente menata al vertice dell' altro diametro, sarà il rettangolo di quella segante nella parte esterna uguale al quadrato di questa tangente. Onde il circolo descritto per coteste due sezioni, e per lo contatto dovrà segar la parabola in que' due punti, ed insiem toccarla in quest' altro. Imperocchè essendo la parabola, e'l cerchio toccati da una stessa retta ed in un istesso punto, sarà minore di ogni angolo acuto rettilineo tanto l' angolo del contatto circolare, che quello del contatto parabolico. Onde la differenza di questi angoli, cioè quello delle dette curve, sarà molto minore di ogni angolo acuto rettilineo. E ciò ne importa, perchè la parabola e'l cerchio abbiansi quivi a toccare.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

§. 67. *Una retta non può segar la parabola in più di due punti. Nè un cerchio in più di quattro punti può incontrarne la detta curva.*

fig. 22. *Dim. Part. I.* La retta CA sia una corda della parabola CAG; dico non poter esser questa curva in un altro punto segata da quella retta. Per lo punto C si meni la CH parallela ad un diametro della parabola; ed al diametro CH si tiri per A la semiordinata AB, ed un'altra GH per un qualunque punto G sottoposto ad A, la quale ne incontri la CA in F: e finalmente per A si conduca la retta AR parallela alla CH. Sarà FH : AB :: CH : CB a cagione de' triangoli simili FHC, ABC. Ma la seconda di queste due ragioni per la natura della parabola è uguale a quella di GH^2 ad AB^2. Dunque sarà FH : AB :: GH^2, AB^2, cioè FH : GH :: GH : AB, e quindi sarà dividendo FG : GH :: GR : AB; e 'l rettangolo di FG in AB uguale a quello di GH in GR. Ma il rettangolo di GH in GR va crescendo a misura, che il punto G più si discosta dall'altro A. Dunque dovrà crescer nello stesso modo il rettangolo di FG in AB, o la sua base FG, per esserne costante l'altezza AB. E perciò la retta AF, e la parabola CAG dovran continuamente diverger fra loro.

fig. 18. *Part. II.* I due diametri GM, ed IL della parabola AGBR sieno equidistanti dall'asse. Saranno uguali i parametri GQ, ed IP di essi. Ed intersegandosi in un punto C le due qualunque ordinate AD, BN de'

detti diametri, ne saran pure uguali i rettangoli ACD, BCN de' loro segmenti*. Onde l'è forza, che un cerchio passi pe' quattro punti A, B, D, N. Or questo non può in un altro puuto R incontrarne il perimetro parabolico. Imperocchè, condottavi la corda AR, sarebbe il rettangolo ASR uguale all' altro BSN*: onde il parametro del diametro di AR sarebbe uguale a GQ, o alla sua uguale IP. Lo che ripugna. C.B.D.

* 60. * 35.III.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

§. 68. *Se un cerchio interseghi la parabola* ABFQ *ne' punti* A, B, D, N, *da' quali si tirino sull'asse* FK *le semiordinate* AS, BO, DR, NK; *la somma di quelle semiordinate, che son da una parte dell' asse, dee uguagliare la somma delle rimanenti, che ne son dall' altra parte.* fig. 18.

Dim. Si tirino le corde AD, BN, e i loro diametri GM, PH. Sarà KH l'eccesso di KN sopra NH. E prendendo le PO e PB, che uguagliano respettivamente le KH, ed HN, sarà PO l'eccesso di KN sopra BP. Oode la KN dovrà superare la BO per 2OP. E così pure dimostrandosi, che AS superi DR per 2TR, ch' è quanto 2OP, per essere i diametri QH e GM ugualmente distanti dall'asse, saranno le quattro grandezze KN, BO, AS, DR aritmeticamente proporzionali: onde la somma dell' estreme KN e DR dovrà eguagliare (*) quella delle medie BO ed AS. C.B.D.

(*) Questo Teorema serve ad illustrare la dottrina Cartesiana

§. 69. *Def.* VII. Tre grandezze si dicono essere in *proporzione armonica*, se la massima di esse stia alla minima, come l' eccesso della massima sulla media all' eccesso di questa sulla minima.

I numeri 6, 4, 3 sono in tal relazione: imperciocchè n' è 6 : 3 :: 6—4 : 4—3 :: 2 : 1.

fig. 24. §. 70. *Cor.* I. Se nella retta AE prendansi dall' estremo A le due parti AO, AD, che faccian con essa un' armonica proporzione, cioè tale, che stia AE : AD :: AE—AO : AO—AD, ovvero AE : AD :: EO : OD, tal retta si dirà divisa armonicamente ne' punti O, e D.

§. 71. *Cor.* II. Vale a dire una retta si dirà divisa armonicamente in due punti, quando quest' intera retta stia ad un de' suoi segmenti estremi, come l' altro estremo al medio.

§. 72. *Scol.* Cotesta divisione di una retta fu chiamata dal Signor Pascal *sezione armonica*, o *musica*: e 'l nostro Borelli disse *analogia conterminale* una tal proporzione.

---

della construzione de' Problemi Solidi. La sua dimostrazione è assai più facile di quella dello Scoothen, che la congegnò con un' analisi assai lunga: ed ella può adattarsi anche a casi omessi.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

§. 73. *Se da un punto A esistente fuori la parabola GNE le si conducano le due tangenti AB, AC, ed una segante ADE, che la detta curva incontri in due punti; cotesta segante sarà divisa armonicamente dalla curva, e dalla retta fra' contatti.* fig. 24

Dim. Si divida per metà la retta BC fra' contatti, e si unisca il punto di tal bissezione col concorso delle proposte tangenti per mezzo della retta SA. La parte NS di questa congiungente dovrà esser il diametro dell' ordinata BC^*. Inoltre da' punti D, ed E si tirino le ordinate DL, EG al diametro NS, che incontrino la tangente AF in H, ed F. E per lo punto C si tiri la CM parallela alla NS. • 59.

E poichè il rettangolo GFE sta al quadrato di FC, come il parametro del diametro NK a quello dell'altro diametro CM^*: ed in questa stessa ragione è anche il rettangolo LHD al quadrato di CH; sarà GFE : LHD :: $FC^2 : CH^2$. Ma per la similitudine de' triangoli KAF, PAH sta $KF^2 : PH^2 :: KA^2 : PA^2$; e per la somiglianza degli altri due KAE, PAD l' è anche $KE^2 : PD^2 :: KA^2 : PA^2$. Dunque sarà $KF^2 : PH^2 :: KE^2 : PD^2$, e per la 19. El. V. dovrà essere GFE : LHD :: $KF^2 : PH^2 :: FA^2 : HA^2$. Sicchè uguagliando fra loro quelle ragioni, che si son mostrate uguali alla medesima ragione di GFE ad LHD, sarà $FC^2 : CH^2 :: FA^2 : HA^2$, ed FC : CH :: FA : HA. E quindi ancora EO : OD :: EA : AD. • 61.

§. 74. *Cor.* 1. Dall' estremo E della segante AE, al punto medio S della CB fra contatti si conduca la

retta ES, che incontri la semiordinata DP in L, ed in V la sua parallela tirata per lo punto A. Sarà KE: PL :: SK : SP pe' triangoli simili KSE, PSL. Ma è poi SK : SP :: OE : OD ed OE : OD :: AE : AD, e questa ragione pe' triangoli simili AKE, APD è uguale a quella di KE a PD. Dunque sarà KE : PL :: KE: PD. Onde essendo uguali le PD, e PL il punto L dovrà cadere nella curva.

Ed eccone da ciò un' insigne proprietà di un tal soggetto.

§. 75. *Cor.* 11. *La retta* ES, *che da un punto della parabola* ECN *conducesi al punto medio* S *della retta* BC *fra contatti, e si distende insino all'* AV *parallela alla* BC *dal concorso delle tangenti* BA, *ed* AC, *n' è divisa armonicamente in* S, *ed* L *dalla retta* BC, *e dalla curva.*

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

fig. 29. §. 76. *Se dal punto* R *cadano nella sottoposta parabola* FAG *le due tangenti* RF, RG, *e le due seganti* RB, RT, *niuna delle quali sia un diametro della curva; tirata la retta* FG *fra contatti, e le altre due* AV, BT, *per le sezioni superiori, e per le inferiori respettivamente; queste tre rette o saranno fra loro parallele, o dovranno concorrere in uno stesso punto.*

fig. 24. *Dim. Caso* 1. Suppongasi la LD parallela alla GE;
* 2. VI. sarà GA : AL :: EA : AD*. Ma di queste ragioni la prima è uguale a quella di GQ a QL, e la seconda

all'altra di EO ad OD*. Dunque sarà GQ : QL :: EO : OD; e quindi QO parallela ad LD. * 73.

Caso 2. La retta FG pe' contatti incontri la retta AV distesa per le sezioni inferiori nel punto S; io dico, che in questo stesso punto la retta AV distesa per le sezioni superiori debbale incontrare. Se l'è possibile FG incontri AV nel punto O diverso dall'altro S. Si unisca SR, e per A, ed V si menino le rette NAM, PVQ parallele alla BS: sarà BC : CA :: BR : RA*. Ma la prima di queste ragioni è l'istessa di quella di BS ad NA, essendo simili fra loro i triangoli BCS, NCA. E la seconda, a cagion de' triangoli simili BRS, ARM è pure uguale a quella di BS ad AM. Dunque avrassi BS : NA :: BS : MA, e quindi NA uguale ad MA. fig. 25. * 73.

Similmente sta TD : DV :: TR : RV; e pe' triangoli simili TDS, PDV è pure TD : DV :: ST : PV; e per gli altri TRS, VRQ anche simili tra loro, sta TR : RV :: TS : VQ. Dunque sarà ST : PV :: ST VQ, e con ciò PV uguale ad VQ. Or essendosi dimostrate le rette NA, e PV rispettivamente uguali ad AM, ed VQ, sarà NM doppia di NA, e PQ di PV; e quindi dovrà essere NA : PV :: NM : PQ. Ma sta NA : PV :: NO : PO, pe' triangoli simili NAO, PVO. Ed è NM : PQ :: NS : PS, per la similitudine degli altri NMS, PQS. Dunque sarà NS : PS :: NO : PO. E dividendo NP : PS :: NP : PO, cioè PS uguale ad OP. Lo che ripugna. C.B.D.

§. 77. *Cor.* 1. Le due seganti RB, RT cadano dalla stessa parte del diametro della parabola FAGT, il quale passi per R, e la prima di queste due rette si aggiri circolarmente intorno ad R, sinchè combaci colla RT. Sarà chiaro, che cadendo la RB sulla RT, le rette tra le proposte sezioni, cioè le AVS, BTS, debbano divenir tangenti della curva in V, e T.

§. 78. *Cor.* II. Dunque, *se dal punto* R *cadano nella parabola* FAG *le due tangenti* RF, *ed* RG, *ed una sola segante* RT, *che non siane un diametro*; *la retta fra' contatti dovrà passare pel concorso delle tangenti menate alla curva per quei due punti delle sezioni.*

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

fig. 26. §. 79. *Se per un punto* K *preso entro la parabola* ABS *si meni ovunque la corda* AS, *e pe' suoi estremi conducansi ad essa curva le due tangenti* AV, SV; *il concorso di queste tangenti dovrà esserne allogato in una retta data di posizione.*

Dim. Il diametro FG che passa per quel punto K, potraggasi oltre il vertice F, finchè la parte esterna FE sia uguale ad FK. Per lo punto E si meni la EV parallela alla tangente della parabola in F. E nell' altro punto S della parabola si tiri la tangente SV, che incontra la EV in V. Sarà chiaro, che la segante VH condotta pe' due punti V, e K debba esser divisa
* 74. armonicamente in M, e K.* E la congiunta VA dovrà toccare la parabola in A. Imperocchè se la VA non sia quella tangente, che dal punto V si conduce sul ramo parabolico MAH; sia V*a* cotesta tangente. Dunque la retta, che unisce i contatti S ed *a* delle divisate tangenti VS, V*a*, dovrà tagliare la HV in un punto *r* diverso da K. Con che la retta HV non solo sarà divisa armonicamente in K ed M, ma anche in *r*
* 73. ed M*. Ciocchè ripugna. Dunque AV è tangente della parabola al par dell' altra VS, ed il loro concor-

so V sarà allogato nella retta EV data di posizione (*). C.B.D.

§. 80. *Cor.* Cotesta retta data di posizione si determina nel seguente modo. *Dal dato punto* K *conducasi la* KE *parallela ad un diametro della parabola, producendola fuori di questa curva, finchè la parte esterna* FE *sia uguale all'interna* FK. *E poi per lo punto* E *si distenda la* EV *parallela alla tangente nel punto* F.



(*) La maggior parte delle verità, che ho recate in quest'argomento, sogliono esser di un difficile conseguimento nel volerle analiticamente ottenere. E perciò veggonsi ne' Corsi analitici omesse. *Ved.* §. 379., e *seg. del Tratt. Analit. delle curve coniche.*

CAP. III.

DE' FUOCHI DELLA PARABOLA.

§. 81. *Def.* VIII. Per *fuoco* della parabola intendesi quel punto dell' asse, ove l' ordinata, che vi corrisponde, è quanto il parametro principale.

§. 82. *Def.* IX. Se dagli estremi dell'ordinata condotta pel fuoco della parabola si tirino le tangenti ad essa curva, il concorso loro si dirà *punto di sublimità*. E la retta, che per lo punto di sublimità vi si distende parallela alle ordinate dell' asse, si chiama *linea di sublimità*: che certi Geometri moderni la sogliono dire *direttrice* della parabola.

§. 83. *Scol.* Coteste definizioni, come vedrassi ne' due seguenti libri, convengon pure all' Ellisse, ed all' Iperbole.

fig. 27. §. 84. *Cor.* I. Suppongasi l'ordinata Lr dell' asse AQ uguagliarne il parametro principale AX; sarà F il fuoco della parabola. Ed essendo continuamente proporzionali le rette AF, FL, AX, siccome FL è metà di AX, così AF dovrà esser metà di FL, e quindi quarta parte di AX. E sarà pure FA uguale ad AM, posto che in M stia il punto di sublimità della parabola.

§. 85. *Cor.* II. Dunque il fuoco della parabola dista per la quarta parte del parametro principale dal vertice dell' asse. E da un tal vertice per altrettanto dee distarne il punto di sublimità.

§. 86. *Def.* X. Ogni retta, che dal fuoco della parabola conducesi ad un qualunque punto di essa curva, si dice *ramo*. Ed ella da alcuni Geometri suol dirsi *inclinata*.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

§. 87. *Se ad un qualunque punto* R *della parabola* RAL *si tirino il ramo* FR, *e 'l diametro* RS; *queste due rette saranno ugualmente inclinate alla tangente* MR *condotta alla parabola per quel punto. Cioè l'angolo* FRM *dovrà pareggiare l'altro* CRG. fig. 27.

Dim. Da' punti A, ed R di questa curva conducansi all'asse AQ le perpendicolari AN, RQ; dovrà essere AN : QR :: MA : MQ pe' triangoli, simili MAN MQR; e quindi siccome per la tangente MR la MA è suddupla della MQ*, così esser dee AN metà di QR, * 57.
e con ciò AN^2 quarta parte di RQ^2, o del suo ugual rettangolo QAX*. Ma è ancora il rettangolo MAF quarta parte dello stesso rettangolo QAX, essendone MA * 40.
uguale ad AQ, ed AF quarta parte di AX*. Dunque * 84.
saranno tra se uguali il rettangolo MAF e 'l quadrato di NA. E quindi sarà MA : AN :: AN : AF, e l'angolo MNA uguale all'altro NFA. Il perchè aggiungendovi di comune l'angolo ANF, dovrà risultarne l'intero angolo MNF uguale a' due AFN, ed ANF, che fanno un retto. Onde convien che la FN sia perpendicolare alla MR.

Ciò premesso, i due triangoli rettangoli FNR, FNM han di comune il lato FN, ed han pure tra se uguali i due lati NR ed NM per esserne uguali le due AQ ed AM*: dunque per la 4. del I. degli Elementi * 57.
sarà l'angolo FRN uguale ad FMN o al suo uguale CRG. C.B.D.

§. 88. *Cor.* I. La retta che congiunge il fuoco di una parabola col concorso di due tangenti di essa, l' una condottavi per lo vertice dell'asse, e l'altra ovunque lateralmente, è sempre perpendicolare alla tangente laterale.

§. 89. *Cor.* II. Cioè a dire, *se dal fuoco della parabola si abbassi la perpendicolare ad una qualunque tangente laterale di essa curva, il concorso di queste due rette sarà sempre allogato nella tangente del vertice dell' asse.*

§. 90. *Cor.* III. La retta FM è uguale ad FA+AM, cioè ad FA+AQ. Dunque il ramo FR, che si è dimostrato uguale ad FM, sarà uguale ad FA+AQ. Vale a dire, *ogni ramo è quarta parte del parametro*
* 53. *del diametro, che ne corrisponde al suo estremo**.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

fig. 28. §. 91. *Nella parabola* LAR *ciascun ramo* FR *è uguale alla distanza del suo estremo* R *dalla* DT *linea di sublimità di una tal curva.*

E lo stesso ramo è quanto la semiordinata condotta all' asse pel suo estremo, e distesa insino alla tangente, che procede dal punto di sublimità verso di esso ramo. Cioè a dire il ramo FR *è uguale sì ad* RS, *che a* PN.

Dim. Part. I. Essendo in tal curva la retta DA
* 84. uguale ad AF*, aggiuntavi di comune l'ascissa PA, sarà PD uguale ad AF+AP. Ma il ramo FR è uguale all' ascissa AP insieme colla quarta parte del parame-
* 90. tro dell' asse*. Dunque sarà FR uguale a DP, ovvero

ad SR, ch' è uguale a DP a cagion del parallelogrammo DPRS.

Part. II. Inoltre la semiordinata FM, che passa pel fuoco F, è doppia della sua ascissa AF*, * 84.
di cui n' è anche dupla la sottangente DF. Dunque sarà DF uguale ad FM. Ma per esser simili i due triangoli PDN, FDM, dee stare DF : FM :: DP : PN. E si è dimostrata la FM uguale alla PF. Dunque sarà benanche PN uguale a PD, o ad RS, cioè al ramo FR. C.B.D.

§. 92. *Cor.* I. La retta RS si distenda, sinchè ne incontri in K la sottoposta ordinata CG. Sarà FR con RK uguale ad SK, ch' è la distanza della detta ordinata dalla linea di sublimità di essa curva.

§. 93. *Cor.* II. E perciò *ogni ramo accresciuto della distanza del suo estremo da una sottoposta ordinata all' asse, è di una costante grandezza, cioè quanto la distanza della detta ordinata dalla linea di sublimità.*

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

§. 94. *Esibire la descrizione organica della parabola co' principj del Coroll. preced.*

Sol. Si prenda un filo flessibile FRK uguale in *fig.* 28.
lunghezza alla riga SK: ed un estremo di quello si attacchi all' estremo K di questa, e l' altro estremo di esso filo si annodi ad un chiodetto fermato in F. Dipoi si dimeni la riga SK con moto a se parallelo, facendola strisciare coll' altro estremo S per la retta DT, che sia perpendicolare alla medesima SK: e nell' istes-

so mentre uno stiletto muovasi d' accanto ad essa riga, tenendone sempre teso il detto filo. Cotesto stiletto dovrà descrivere una parabola, che avrà per asse la retta AFP parallela ad SR, e la dupla DF per parametro principale.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

fig. 29. §. 95. *Se ad un punto* R *della parabola* RAK *conducasi il ramo* FR, *e la normale* RQ, *e poi dal punto* Q, *ove questa ne incontra l' asse di tal curva, si abbassi la* QP *perpendicolare al detto ramo; il segmento* RP *toltone da esso ramo verso quel punto* R, *sarà quanto il semiparametro principale.*

E la normale sarà media proporzionale tra 'l detto ramo, e 'l parametro principale.

Dim. Part. I. Si tiri per lo punto R la RB semiordianata all' asse AQ, e si prenda il punto T della sublimità di essa curva. Sarà la BQ uguale alla TF, per esserne ciascuna di esse metà del parametro
* 57. principale*. Dunque aggiungendo loro la FB di comune, dovrà risultarne FQ uguale a TB, o al ramo FR. E sarà quindi l' angolo FRQ uguale all' altro FQR. Il perchè i due triangoli rettangoli QPR, QBR, avendo di comune l' ipotenusa RQ, ed i loro uguali angoli acuti PRQ, BQR, come si è dianzi dimostrato, dovranno avere uguali i corrispondenti cateti RP, e QB.
* 57. Ma la QB è quanto il semiparametro principale*. Dunque anche il segmento RP del proposto ramo dovrà adeguarne il semiparametro principale.

Part. II. Essendo la BQ doppia della AF, e la

sottangente NB ancor dupla dell' ascissa AB, sarà l' intera NQ doppia della somma delle AB, ed AF, cioè del ramo FR*. Ma per lo triangolo rettangolo QRN il quadrato di RQ è uguale al rettangolo NQB, o all' altro di FR in AX, prendendo la metà di un lato di quel rettangolo, e 'l duplo dell'altro. Dunque sarà la normale RQ media proporzionale tra 'l ramo FR, e 'l parametro principale AX. C. B. D. * 91.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

§. 96. *Se a' punti* K, *ed* R *della parabola* RPK *conducansi le due tangenti* TK, TR, *ed i due rami* FK, FR; *la retta* FT, *che unisce il fuoco di una tal curva col concorso di quelle due tangenti, divide per metà l' angolo* RFK *de' rami.* fig. 30.

Dim. Si tiri la retta KR fra' contatti: ed abbassate le perpendicolari KA, RB da' punti K, ed R sulla linea AN della sublimità della parabola, vi si conducan le tangenti PN, QN per gli estremi della corda PFQ. S' intenderà che le tre rette PN, QN, KR abbiansi ad incontrare in uno stesso punto*. Onde siccome il concorso delle due tangenti PN, QN dee cadere in quella retta AN*, così l'incontro di tutte e tre le rette PN, QN, KR dovrà trovarsi nella retta AN. E poichè la retta KN è armonicamente divisa in O ed R*, dee stare KO : OR :: KN : NR. Ma la seconda di queste due ragioni pe' triangoli simili KNA, RNB è uguale a quella di KA ad RB, o a quell' altra de' rami FK, FR, essendo questi rami eguali a quelle perpendicolari nella parabola*, e

* 78. * 78. * 74. * 91.

nelle altre due sezioni ad esso proporzionali. Dunque sarà KO : OR :: FK ; FR : e quindi l'angolo RFK
* 3. VI. de'rami dovrà esser diviso per metà dalla FT*. C.B.D.

§. 97. *Cor.* I. Dunque la retta, che congiunge il fuoco della parabola col concorso di due tangenti di questa curva, dee esserne ugualmente inclinata ai rami che vi si conducano pe' contatti. *E se mai stian per dritto questi due rami, quella congiungente dovrà esserne ad essi perpendicolare.*

fig. 29. §. 98. *Cor.* II. Le due tangenti RE, e CO condotte nella parabola per gli estremi de' rami FR, FC, ne incontrino l'asse in N, ed O. Saranno uguali gli angoli FNR, FRN del triangolo RFN, come si è dimostrato nella Prop. XIX. Onde l'angolo esteriore RFQ dovrà esser duplo del solo angolo N. E dimostrando in simil guisa, che l'angolo CFQ sia anche duplo dell'altro FOC, o del suo uguale EON; saranno i due angoli RFQ, CFQ dupli de' due ONE, EON, o del solo REC: cioè RFC *compreso da' rami FR ed FC, sarà doppio dell'angolo REC, che ne comprendono le tangenti menate agli estremi loro.*

§. 99. *Cor.* III. E perciò se conducansi due tangenti alla parabola per gli estremi di una corda, che passi per lo fuoco, sarà *retto l'angolo compreso da queste due tangenti : il vertice del detto angolo dovrà cadere nella linea di sublimità di una tal curva : e dovrà essere perpendicolare ad essa corda la retta, che vi congiunge il vertice di quest'angolo col fuoco della curva.*

CAP. IV.

Delle dimensioni della Parabola.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

§. 100. *Lo spazio parabolico* AFM *racchiuso dalle* fig. 31.
due coordinate AF, *ed* FM, *e dall' arco* AM, *ch' è in mezzo ad esse, è due terzi del parallelogrammo* AFMP *compito dalle medesime coordinate.*

Dim. La retta PA intendasi divisa nelle particelle uguali PR, R*r*, ec. qualunque sia il numero di esse: e dal punto P si elevi ad AP la perpendicolare PQ di quella lunghezza che ne piace. Dipoi compito il parallelogrammo PQTA vi si tiri la diagonale AQ: e pe' punti R, *r*, ec. si conducano le rette RE, *re*, ec, parallele ad AF, e le altre RS, *rs*, ec., parallele a PQ. E così pure da' punti G, *g*, ec. segnati nella curva AGM dalle RE, *re*, ec. si tirino le GN, *gn*, ec. parallele ad AP: e dagli altri punti C, *c*, ec. le altre CD, *cd*, ec. equidistanti ad AP. Finalmente il rettangolo PQTA con perfetta rivoluzione si rivolga intorno ad AP.

Ciò premesso, il parallelogrammo MPRE sta all' altro NPRG, come MP a PN*, o come FA ad AB. * 1. VI.
Ma per la natura della parabola sta FA : AB :: FM^2: BG^2, cioè come PA^2 ad RA^2, o come PQ^2 ad RC^2, pe' triangoli simili QPA, CRA. Ed in questa ragione di

PQ² a CR² sono i due cilindri nati con quella rivoluzione da' rettangoli PQSR, PDCR (*). Dunque sarà il parallelogrammo MPRE all'altro NPRG, come il cilindro generato dal rettangolo PQSR, all'altro generatovi da PDCR. E ciò sempre dimostrandosi, saranno tutti i parallelogrammi MPRE, ERre, ec, che compongono l' intero parallelogrammo MPAE a tutti i parallelogrammi PNGR Rngr, ec., che sono iscritti nello spazio parabolico esterno MPA, come tutti que' cilindri di PQSR, di SRrs, ec., che costituiscono il cilindro del rettangolo PQTA rivolto intorno a PA, a tutti i cilindri di PDCR, di Rdcr, ec. iscritti nel cono generato
* lem.1. dalla rivoluzione del triangolo PQA intorno a PA*. Ma i parallelogrammi PNGR, Rngr, ec. terminano nel trilineo parabolico MPA, siccome nel cono di PQA van pure a terminare i detti cilindri de' rettangoli PDCR, Rdcr, ec. Dunque sarà il parallelogrammo MPAF al trilineo parabolico MPA, come il cilindro del rettan-
* lem.2 golo PQTA al cono del triangolo PQA*, cioè come 3
* 10.XII. ad 1*. Equindi il trilineo MPA è un terzo del parallelogrammo MPAF: e lo spazio parabolico interno MFA dovrà esserne due terzi dello stesso parallelogrammo delle coordinate AF, ed FM. C. B. D.

*§. 101. *Cor.* I. Gli spazj parabolici AMF, AGB essendo parti simili de' parallelogrammi delle coordinate AFMP, ABGR, saranno al par di questi in ragion composta della ragione di AF ad AB, e dell' altra di
* 23.VI. MF a GB*.

§. 102. *Cor.* II. Ed essendo la prima di queste due

(*) I cilindri di uguali altezze sono come le loro basi Prop. 11 lib. XII. E queste basi, che son cerchi, deggiun essere, per la Prop. 2. del libro stesso, come i quadrati de' loro raggi.

ragioni componenti duplicata dell' altra; la ragion che n' emerge dalla loro composizione sarà triplicata della seconda, o sesquiplicata della prima (*): cioè *gli spazj parabolici racchiusi dalle coordinate ad un medesimo diametro, e da' rispettivi archi, sono fra loro in triplicata ragione delle semiordinate, o in sesquiplicata delle ascisse.*

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

§. 103. *Se lo spazio parabolico* ACK *racchiuso delle coordinate rettangolari* AC, CK, *e dall'arco* AK *si aggiri insieme col rettangolo delle stesse coordinate intorno all' asse* AC, *compiendovi una perfetta rivoluzione; la conoide parabolica, che si genera dal detto spazio* ACK, *è metà del cilindro generatovi dal rettangolo* ACKD. fig. 32.

Dim. L' ascissa AC della parabola ACK intendasi divisa nelle particelle uguali CF, FB, ec., qualunque sia il numero di esse, e pe' punti F, B, ec. sian condotte nel rettangolo le rette FI, BV, ec. parallele all' ordinata CK. Si unisca la AK, e si tirino le QT, GE parallele ad AC.

I cilindri, che nella proposta rivoluzione vengonsi a generare da' rettangoli IVBF, EGBF, avendo la stessa altezza sono come le loro basi*, cioè come i cir- *11.XII.

(*) Una ragion, che si compone da due altre, di cui la prima sia duplicata della seconda, dicesi sesquiplicata della sola prima.

coli de' raggi VB, GB: ond' essi saranno in duplicata
* 2.XII. ragione di VB, ossia di KC a GB*, cioè come CA ad
* 33. AB*. Ma i rettangoli IVBF, TQBF sono ancor essi come è la VB, o la sua uguale KC alla QB, cioè come CA ad AB pe' triangoli simili KAC, QAB. Dunque i mentovati cilindri saran fra loro come i rettangoli IVBF, TQBF.

Questo stesso filo di ragionamento intendasi ancor disteso per le altre particelle della CA. Dunque sarà il cilindro di KDAC, ch' è l' aggregato de' cilindri di KIFC, di IVBF, ec, alla somma de' cilindri di OMFC, di EGBF, ec. iscritti nella conoide, come il rettangolo KDAC somma de' rettangoli KIFC, IVBF, ec. alla somma de' rettangoli LSFC, TQBF,
* lem. 1. ec. iscritti nel triangolo KAC*. Ma tutti i cilindri de' rettangoli OMFC, EGBF ec. vanno a terminare nella conoide generata dalla parabola KAC, e nel triangolo KAC veggionsi terminare i rettangoli TQBF, LSFC, ec. Dunque sarà il cilindro di KDAC alla conoide generata dalla parabola KAC, come il rettangolo KDAC al triangolo KAC, cioè come 2 ad 1. Val quanto dire la mentovata conoide è metà del cilindro, che le si circoscrive. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

§. 104. *Poste le medesime cose del precedente Teorema, la superficie della conoide generata dallo spazio parabolico* DAC *è quarta proporzionale dopo il triplo raggio di un cerchio, la sua periferia, e la differenza del quadrato del semiparametro principale dal rettangolo della normale e del semiparametro corrispondenti al punto estremo* D *dell' arco parabolico proposto.* fig. 39.

Dim. La semiparabola CAR intendasi elevata nel sito CBK, sicchè il suo vertice A ne salga al punto B di sublimità, e 'l fuoco si trasporti ove ne stava il suo vertice. E poi la DC si distenda, finchè incontri in K cotesta nuova parabola BEK. Sarà chiaro dover essere la CK uguale alla DS normale della parabola in D. Imperocchè il quadrato della DS uguaglia il rettangolo del corrispondente ramo FD nel parametro principale AT*, cioè al rettangolo di CB in AT. Ma il quadrato di CK è anche uguale al detto rettangolo per la natura della parabola BEK. Dunque sarà DS^2 uguale a CK^2, DS uguale a CK, e 'l quadrilineo AEKC sarà la scala delle normali della semiparabola ACD.* * 95. * lem. 3.

Inoltre essendo BA metà di AE sarà il rettangolo di BA in AE metà del quadrato di AE: e quindi lo spazio parabolico ABE, ch' è due terzi di esso rettangolo*, sarà un terzo del quadrato di AE. E lo spazio parabolico CBK, ch' è anche due terzi del rettangolo di BC in CK, sarà due terzi del rettangolo di FD in DS, o un terzo del rettangolo del semiparametro, * 100.

90\. ch'è $2FD^2$ e della normale DS corrispondenti al punto D. Finalmente il quadrilineo parabolico CAEK differenza di que' trilinei ABE, CBK sarà quanto la differenza di $1/3\,AE^2$ da $1/3\,ES$ in $2FD$.

Ciò premesso, per lo Lemma III. delle geometriche prenozioni la superficie della detta conoide sta alla corrispondente scala CAEK delle normali della sua generatrice, com'è la periferia di un cerchio al raggio: dunque sarà la detta superficie alla differenza di $1/3AE^2$ da $1/3DS$ in $2FD$, come la periferia di un cerchio al suo raggio. E, triplicando i conseguenti di quest'analogia, starà cotesta superficie conoidale alla differenza del quadrato del semiparametro principale dal rettangolo della normale e del semiparametro corrispondenti al punto estremo D dell'arco parabolico AD, come la periferia di un cerchio al triplo del suo raggio. C.B.D.

§. 105. *Scol.* S' io avessi ragionato de' raggi d'osculo della parabola, darei al presente tema un' elegante forma; ed è: che: *la superficie di tal Conoide sia quanto un cerchio, il cui raggio è medio proporzionale fra la terza parte del parametro principale, e la differenza de' raggi d'osculo ne' punti estremi della generatrice di essa superficie.* Intanto i Giovani potran consultare il §. 467. del Tratt. Analit. delle Curve Coniche, o potran poi procurarsi un tal Teorema per mezzo della Teoria de' raggi d'osculo, ch'esporrò nella fine di queste Istituzioni.



DELLE

SEZIONI CONICHE

LIBRO SECONDO.

DELL' ELLISSE.

CAP. I.

DE' DIAMETRI DELL' ELLISSE GENERALMENTE CONSIDERATI.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

§. 106. *Nell' Ellisse* AND *il quadrato di una qualunque semiordineta* MN *sta al rettangolo* AMD *delle ascisse d' amendue i vertici* A, *e* D, *come il lato retto* AB *al trasverso* AD, *cioè come il parametro al diametro.* fig. 34.

Ed i quodrati di due semiordinate NM, *n m sono tra loro come i rettangoli* AMD, AmD *delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici* A, *e* D.

Dim. Part. I. Il quadrato della semiordinata NM è uguale al rettangolo della corrispondente ascissa AM erettale dal suo estremo, e distesa insino alla regola-

* 47. trice DB*. Ma il rettangolo di AM in MQ sta all'altro di AM in MD, come MQ ad MD, o come AB ad AD, pe' triangoli simili DMQ, DAB. Dunque sarà NM^2 : AND :: AB : AD.

Part. II. Intanto alla medesima ragione di AB ad AD è uguale sì quella di NM^2 ad AMD, che l'altra di nm^2 ad AmD. Dunque queste due ragioni saranno tra se uguali: cioè a dire starà NM^2 : AMD :: nm^2 : AmD. E permutando dovrà essere NM^2 : nm^2 :: AMD: AmD. C. B. D.

§. 107. *Def.* 1. Nell' ellisse AND il punto medio C del lato trasverso AD si chiama *centro di tal sezione*. E la retta CF, che dal centro dell' ellisse conducesi parallela alla regolatrice DB, e si distende insino al parametro AB, suol dirsi *surregolatrice*.

§. 108. *Cor.* 1. Dalle due rette AM, AB si compia il parallelogrammo MABH: e l' altro MAFR compiasi dalle altre due AM, AF. E poi per lo punto Q si distenda la QG parallela ad AM. Si vedrà esserne il parallelogrammo MABH duplo dell' altro MAFR: e si conoscerà agevolmente, che il rettangolo QGBH parte della prima di quelle due figure sia doppio del triangolo PRF parte della seconda. Dunque per la 19. El. V. dovrà essere il rimanente rettangolo MAGQ duplo del rimanente trapezio MAFP; cioè MN^2 uguale a 2MAFP.

§. 109. *Cor.* II. E perciò nell' Ellisse *il quadrato di una qualunque semiordinata è duplo del trapezio, che la corrispondente ordinata alla Regolatrice ne tronca dal triangolo formato dalla surregolatrice, e dalle metà del lato retto, e del transverso.* E quindi i quadrati delle semiordinate NM, ed nm saran proporzionali a cotesti trapezj corrispondenti AMPF, ed AmpF.

§. 110. *Scol.* Per la definizione della *Tangente*

dell' Ellisse adottisi quella, che fu recata per la parabola nella *Def.* 1. *Lib. prec.* E deesi avvertire, che nell' Ellisse potrem benanche computar dal centro, ed in sul diametro le ascisse corrispondenti alla ordinate della figura.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

§. 111. *Nell' ellisse* AND, *se il semidiametro* CA *producasi oltre il suo vertice, sinchè esso semidiametro accresciuto di tal prolungamento, cioè la* CP, *sia terza proporzionale dopo un' ascissa dal centro* CM, *e 'l detto semidiametro; la retta, che unisce l' estremo di quel prolungamento con un estremo dell' ordinata corrisponte alla riferita ascissa, sarà tangente di cotesta sezione.* fig. 35.

E l' angolo del contatto ellittico non sarà divisibile, per una retta.

Dim. Part. I. Intendasi praticato nell' ellisse AND quel che si è detto nel Cor. 1. Prop. prec. E poichè dall' esser continuamente proporzionali le tre rette CM, CA, CP n' è CA² uguale a PCM, togliendo da queste grandezze uguali il comun quadrato di CM, dovrà rimanervi il rettangolo AMD uguale all' altro PMC*. Ma questo rettangolo sta a quello di PM in MS, come MC ad MS*, o come AD ad AO, pe' triangoli simili CMS, DAO, cioè per la natura di cotesta curva, come AMD : NM². Dunque sarà il rettangolo di PM in MC all' altro di PM in MS, come il rettangolo di AM in MD al quadrato di NM. Onde l' è forza, che sia il rettangolo di PM in MS uguale al quadrato di NM: e * 5. e 3. II. * 100.

prese le metà loro sarà il triangolo PMS uguale al trapezio AMSF. Finalmente aggiungendo a questi spazj i sottoposti trapezj MRTS, MRVS, di cui il primo vedesi maggior dell' altro, dovrà risultarne il triangolo PRT maggiore del trapezio ARVF. E così pure togliendo dal triangolo PMS, e dal trapezio AMSF rispettivamente i soprapposti trapezj MrtS, MrvS, il primo de' quali dell' altro n'è minore, dovrà rimanervi benanche il triangolo Prt maggiore del trapezio ArvF.

Ciò posto, per la similitudine de' triangoli BRP, NMP sta BR^2 ad NM^2, come PR^2 a PM^2, o come il triangolo PRT all' altro PMS, che per esser simili son come i quadrati de' loro lati omologhi PR e PM. E per lo Coroll. II. Prop. prec. è poi $NM^2 : QR^2 :: AMSF : ARVF$. Dunque sarà *ex aequo* $BR^2 : QR^2 :: PRT : ARVF$. Ma il triangolo PRT si è dimostrato maggiore del trapezio ARVF. Dunque sarà pure BR^2 maggiore di QR^2, la BR maggiore della QR, e'l punto B starà fuori della proposta curva. E dimostrando in simil modo, che ogni altro punto della PB tranne il solo N sia fuori dell' ellisse ANB; quella retta sarà
* 35. tangente di questa curva*. E ciò valga per l'altra congiungente del punto P coll' altro estremo della detta ordinata.

Part. II. Dico inoltre, che niun'altra retta vi possa anche nel punto N toccar l' ellisse. Imperocchè, se ciò può essere, sia N*p* un' altra tangente di tal curva nel dato punto N, ed ella ne incontri il diametro in *p*. Si ritrovi C*r* terza proporzionale dopo le due C*p*, e CA, ed ordinata per *r* la *rq* si unisca la *pq*. Questa in virtù della prima parte di questa Proposizione dovrà toccar l' ellisse in *q*, e distesa in giù, dapoichè dee giacer fuori della curva, ne incontrerà l' al-

tra tangente NP, e maggiormente la Np. Dunque le due rette Np, e pq chiuderebbero spazio. Lo che ripugna. C. B. D.

§. 112. *Cor.* I. Dall' esser le tre rette CM, CA CP continuamente proporzionali abbiam conchiuso qui sopra esser il rettangolo PMC uguale all' altro AMD, onde dovrà stare PM : MA :: MD : MC.

§. 113. *Cor.* II. Di più in questo Teorema si è proposto esserne PC : CA :: CA : CM. Dunque la somma degli antecedenti di queste due ragioni alla somma de' conseguenti loro dovrà stare, come la differenza di quelli alla differenza di questi. Cioè, rilevando coteste somme e differenze, sarà PD : DM :: PA : AM.

§. 114. *Cor.* III. Vale a dire, *nell' ellisse il diametro prodotto insino alla tangente n' è diviso armonicamente dalla curva, e dalla semiordinata per lo contatto*.

§. 115. *Cor.* IV. In questo Teorema n' è indicato quel geometrico artifizio, onde può condursi la tangente all' ellisse AND pe 'l dato punto N, il quale non sia il vertice di tal sezione. E se nel detto vertice vorrà condurseli la tangente, basterà distender per esso la parallela ad una sottoposta ordinata. E la verità della costruzione potrà dimostrarsi, come nella parabola, Coroll. 2. Prop. II.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

fig. 36. §. 116. *La corda* AB, *che distendesi nell' ellisse* FBQ *pel centro* C *di tal figura*, *n' è quivi divisa per metà.*

E le tangenti AS, BT *condotte alla detta curva per gli estremi di essa corda son parallele fra loro.*

Dim. Part. I. Per gli estremi A, e B della proposta corda si tirino le semiordinate AR, BP al diametro EQ della sezione. Saranno i quadrati di coteste rette AR, BP, come i rettangoli ERQ, EPQ. Ma a cagion de' triangoli simili ACR, BCP, sta, AR : BP :: CR : CP, e quindi $AR^2 : BP^2 :: CR^2 : CP^2$. Dunque
* 106. sarà $CR^2 : CP^2$ :: ERQ : EPQ*. Ed in forza della Prop. 12. El. V. per l' ellisse, e della 19. El. V. per l' iperbole avrassi $CR^2 : CP^2 :: CE^2 : CQ^2$, e CR : CP : CE : CQ. Ma CE è uguale a CQ: dunque sarà anche CR uguale a CP. E quindi i triangoli ACR, BCP, che han le condizioni della 26. El. I., dovranno avere uguali i corrispondenti loro lati CA, CB.

Part. II. I quadrati delle CE, e CQ sono rispet-
* 111. tivamente uguali a' rettangoli SCR, TCP*. Onde son questi al par di quelli tra se uguali. Ma dianzi si son mostrate uguali le loro basi CR, e CP: dunque le loro altezze SC, TC saran pure uguali. Il perchè i due triangoli ACS e BCT avendo i due lati AC e CS respettivamente uguali agli altri due BC e CT, e l' angolo ACS uguale all' altro BCT, dovranno avere anche l' angolo CAS uguale all' altro CBT. Onde sarà AS parallela a BT. C. B. D.

§. 117. *Def.* 11. Se per lo centro di un' ellisse, e per un dato punto del perimetro di questa curva conducasi una retta, la quale ne incontri la tangente verticale ed una qualunque semiordinata al diametro della sezione; il trapezio, che si forma nell' incontro di queste quattro rette, si dirà il *quadrilineo corrispondente* alla detta semiordinata.

Così conducendo dal centro G dell' ellisse AQ*a* ad un dato punto Q del suo perimetro la retta GQP, la quale ne incontri la tangente verticale AP e la semiordinata BC del diametro A*a*, il trapezio ABTP sarà il quadrilineo corrispondente alla semiordinata BC, o all' estremo C di essa retta. *fig.* 37.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

§. 118. *Se da un qualunque punto* C *del perimetro ellittico* AC*a* *conducansi le due rette* CN, CB *respettivamente parallele alla tangente laterale* QS *ed alla verticale* AP *di tal curva; il triangolo* NCB, *ch' esse comprendono con una parte del diametro* A*a* *della sezione, sarà uguale al corrispondente quadrilineo* TBAP. *fig.* 37.

Dim. Dal punto Q del contatto si tiri la semiordinata QM al diametro A*a*, dovrà stare GM : GA::GA: GS. Ma pe' triangoli simili GMQ, GAP è pure GM : GA :: GQ : GP. Dunque sarà GA : GS :: GQ : GP. E quindi i due triangoli GAP e GQS, reciprocando i lati intorno al comune angolo AGP, dovranno essere uguali: e saranno pure tra se uguali le loro differenze dal triangolo QGM, cioè a dire il trapezio PQMA e 'l triangolo QMS.

Or essendo i triangoli simili PGA, QGM come i quadrati de' loro lati omologhi GA, GM, sarà convertendo il triangolo PGA al trapezio PQMA, come il quadrato di GA al rettangolo AMa: e sarà quindi invertendo PQMA: PGA :: AMa: AG². E dimostrando in simil guisa essere PGA: PTBA :: GA²: ABa, saranno per uguaglianza ordinata i trapezj PQMA e PTBA, come i rettangoli AMa ed ABa, o come i quadrati delle QM e CB, cui son proporzionali siffatti
* 106. rettangoli*. Ma i quadrati di QM, e di CB son come i triangoli simili QSM, CNB*. Dunque dovrà stare il trapezio PQMA all'altro PTBA, come il triangolo QSM al triangolo CNB; e quindi sarà il trapezio PTBA uguale al triangolo CNB, come si è mostrato il trapezio PQMA uguagliarne il triangolo ASM. C. B. D.

§. 119. *Cor.* I. Se la retta *cb*, che si conduce parallela alla taugente verticale AP, o all'altra *ap*, cada sotto del centro G; il triangolo *cnb* sarà uguale al trapezio *ptba* troncatone dalla medesima *cb* sotto del centro. La qual cosa potrà dimostrarsi in un consimil modo.

§. 120. *Cor.* II. Di qui potrebbesi inferire la seguente verità geometrica, cioè: *se alla base* PA *del triangolo* GPA *si tirino le parallele* QM *e* TB, *e poi la* GA, *ch' è un degli altri due lati, si distenda in a, sicchè Ga l'adegui; i trapezj* AMQP, ABTP *saran fra loro come i rettangoli* AMa, ABa.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

§. 121. *La retta* LN, *che passa per lo centro* *fig.* 38.
dell' ellisse LAQR, *divide per metà tutte le corde* DA, RX, *ec.*, *che dentro una tal curva conduconsi parallele alle tangenti menate pe' suoi estremi* L, *ed* N. *Ond' ella n' è un diametro, cui son ordinate le dette corde.*

Dim. Siccome nella parabola così in quest' altra sezione si possono tre casi verificare: cioè che la corda parallela alla taugente laterale LS ne iucontri il diametro sopra del vertice di esso: che lo incontri nel vertice: e che finalmente lo tagli sotto di un tal punto. In tutti e tre questi casi, la dimostrazione sarà identica a quella della Prop. 5. Lib I.: quando però le ordinate, che dagli estremi della medesima corda conduconsi al diametro, restino entrambe dalla stessa parte del centro. Che se poi uua di coteste ordinate ne resti sul centro, e l' altra cada sotto di esso; la dimostrazione di questi altri casi dovrà nel seguente modo congegnarsi.

Cas. 1. Incontri la corda RX il diametro QG sul *fig.* 39.
vertice, e cada l' ordinata RI sotto del centro; sarà il triangolo TIR uguale al corrispondente quadrilineo QIOp': onde, aggiungendovi di comune il triangolo * 118.
OCI, ne verrà lo spazio TCOR uguale al triangolo pCQ, e al suo uguale GCH. E poichè il triangolo DVX è uguale al trapezio GVYH, togliendo dallo spazio TCOR il triangolo TVX, e dal triangolo GCH il trapezio GVYH, resterà lo spazio VCORX

uguale al triangolo VCY. E togliendo benanche da entrambi il trapezio VCFX, ne verrà il triangolo FOR uguale al suo simile FYX, e perciò FR uguale ad FX.

Cas. 2. Incontri la corda GM nel vertice G il diametro GQ, e dal punto M si ordini ad esso la retta ML, che cada sotto del centro. Dovrà il triangolo GLM adeguare il suo corrispondente quadrilineo QLN*p*. Dunque aggiungendo ad essi il comune triangolo LCN, ne addiverrà lo spazio GCNM uguale al triangolo C*p*Q, ovvero al suo uguale GCH. E quindi se dallo spazio GCNM, e dal triangolo GCH si tolga lo stesso triangolo CGS, ne resterà il triangolo GSH uguale al suo simile NSM, e perciò GS uguale ad SM.

fig. 38. *Cas.* 3. L'ordinata RI cada sotto del centro C, e la RX incontri il diametro sotto del vertice. Ordinata la XV, il triangolo XVT sarà uguale al corrispon-
* 118. dente quadrilineo VGHY*. Onde aggiungendo ad essi il trapezio TVYF, ne risulterà il triangolo XFY uguale al trapezio GTFH. Ma il triangolo TIR uguaglia il suo corrispondente quadrilineo QIO*p*; dunque, se uniremo ad essi di comune il triangolo IOC, n' emergerà lo spazio TCOR uguale al triangolo C*p*Q, o all' altro CGH. E quindi se dagli spazj TCOR, CGH tolgasi il medesimo triangolo TCF, resterà il triangolo OFR uguale al quadrilineo TGHF, o al triangolo FXY, cui si è dimostrato uguale il detto quadrilineo. Ed essendo tra se uguali, e simili i triangoli OFR, XFY, sarà FR uguale ad FX. C. B. D.

§. 122. *Cor.* 1. Nell' ellisse, oltre al lato trasverso assegnatole dalla sua genesi, posson concepirsi infiniti altri diametri, che quivi segansi nel centro.

§. 123. *Cor.* II. Il centro dell' ellisse, i punti medj delle corde tra loro parallele, ed i contatti delle due tangenti ad esse equidistanti, debbon giacersi per diritto. Dunque *una retta, che unisca due di questi punti, dovrà passarne pe' rimanenti.*

§. 124. *Cor.* III. La retta GO, che congiunge il centro dell' ellisse AC*a* col punto medio O della corda DC, dee segar la curva ne' punti Q, e *q* ove le tangenti QS, *qs* son parallele ad essa corda. Poichè se ivi un' altra tangente RV fosse parallela alla DC, anche la GR dovrebbe passare per O, ch'è un assurdo. *fig.* 37.

§. 125. *Scol.* Ma come potrem tirarvi una tangente parallela alla corda DC, o che faccia col lato trasverso A*a* un angolo dato? Suppongasi esser QM la semiordinata per un tal contatto. Sarà dato di specie il triangolo SMQ, e quindi la ragione di SM ad MQ, o di SM^2 ad MQ^2, che può porsi uguale a quella di *a*K posta a diritto col detto lato trasverso, al lato retto *a*L. E poichè sta MQ^2 ad AM*a*, o al suo uguale SMG*, come *a*L ad Aa^2*, sarà *ex aequo* SM^2 ad SMG, ovvero SM ad MG come *a*K ad A*a*. E componendo SG : GM :: AK : A*a*, e quindi AG a GM in sudduplicata ragione di AK ad A*a*. Dunque sarà data l' ascissa GM.

* 112.
* 106.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

fig. 38. §. 126. *Poste le medesime cose della Prop. precedente, i quadrati delle semiordinate* BD, FR *sono fra loro come i rettangoli* LBN, LFN *delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici del diametro* LN.

Dim. Nella Prop. 4. si è dimostrato essere i due triangoli SCL, GCH uguali tra loro. Dunque, tolto da essi il trapezio GZLC, ne resterà il triangolo SGZ uguale all'altro HZL. Ed aggiungendo loro di comune il sottoposto pentagono GZL*f*E dovrà risultarne il trapezio SE*f*L uguale al quadrilineo GE*f*H, cioè al triangolo EMD: e quindi tolto da questi spazj il comun trapezio EMB*f*, vi resterà il trapezio SMBL uguale al triangolo *f*BD.

Che se l'ordinata RI cada sotto del centro dell' ellisse, il triangolo TRI sarà uguale al quadrilineo QIO*p*; onde aggiungendovi di comune il triangolo OCI, n'emergerà il trapezio TROC uguale al triangolo C*p*Q, o all'altro CGH, o ad SCL. Sicchè se tolgasi dal triangolo CSL, e dal trapezio TROC lo spazio TFC, resterà il trapezio STFL uguale al triangolo OFR. E con ciò i due triangoli *f*BD, OFR essendo respettivamente uguali a' quadrilinei SMBL, STFL, la ragione di quelli dovrà pareggiare la ragione di questi, cioè i quadrati di BD, e di FR si avran fra loro come i
* 120. rettangoli LBN, LFN*. C.B.D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

§. 127. *Se da un punto* M *di un qualunque diametro* QP *dell' ellisse* QNP *si elevi la perpendicolare* MT *terza proporzionale dopo l' ascissa* QM, *e la semiordinata* MN, *che corrispondono a quel punto*; *l' estremo* T *della detta perpendicolare sarà allogato in una retta data di posizione*, *che anche dicesi* r e g o l a t r i c e *della proposta curva*. fig. 8.

Dim. Sia l' altra *mt* benanche perpendicolare al diametro QP nel punto *m*, e terza proporzionale dopo l' ascissa Q*m*, e la semiordinata *mn* corrispondenti al punto *m*. Saranno i rettangoli QMT, Q*mt* uguali a' quadrati delle semiordinate MN, ed *mn* respettivamente. Onde quelli al par di questi saranno come i rettangoli QMP, Q*m*P. E sarà permutando il rettangolo di QM in MT all' altro di QM in MP, come il rettangolo di Q*m* in *mt* a quest' altro di Q*m*, in *m*P; cioè MT : MP :: *mt* : *m*P. Dunque i punti T, e *t*, ed infiniti altri similmente condizionati dovran ritrovarsi in una retta data di posizione, che passa per lo punto P. C. B. D.

§. 128. *Def.* 111. La retta QA elevata dal pun- Q perpendicolare al diametro QP dell' ellisse QNP, e distesa insino alla regolatrice PA, dicesi *parametro* di esso diametro.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

fig. 8. §. 129. *Nell' ellisse il quadrato della semiordinata* NM *ad un qualunque diametro* QP *sta al rettangolo* QMP *delle ascisse d' ambedue i vertici di essa, come n' è al diametro* QP *il suo parametro* QA.

Dim. Essendo per lo precedente Teorema NM^2 uguale a QMT, sarà il quadrato di NM al rettangolo di QM in MP, come il rettangolo di QM in MT all' altro di QM in MP, cioè come MT ad MP, e come QA a QP, pe' triangoli simili PMT, PQA. C.B.D.

§. 130. *Scol.* I. Cotesta proprietà essenziale dell' ellisse, che nel primo Teorema di questo libro erasi dimostrata relativamente al lato trasverso di tal curva, qui vedesi doverne anche convenire ad ogni altro diametro di essa. Onde tutto quello, che in conseguenza di un tal principio si è poi derivato, potrà convenevolmente appartenere ad ogni altro diametro dell'ellisse.

§. 131. *Scol.* II. Per la definizione della sottangente di un' Ellisse ritengasi quella che fu recata per la parabola nel §. 55.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

§. 132. *Un qualunque diametro* AD *dell' ellisse* *fig.* 35.
AND, *qualor ne incontri una di lei tangente* NP, *dee restar diviso armonicamente dalla curva, e dall' ordinata* MN *per lo contatto.*

Dim. Se non sia DP : PA :: DM : MA; facciasi come DM ad MA così D*p* a *p*A, e poi si unisca la N*p*. Sarà questa retta tangente dell' ellisse in N.* Onde nel punto N di una tal curva vi saranno le due tangenti NP, N*p*. Lo che ripugna. * 111.

§. 133. *Cor.* I. In questa supposizione può similmente dimostrarsi, che sieno continuamente proporzionali le rette CP, CA, CM.

§. 134. *Cor.* II. Cioè, *se un semidiametro dell' ellisse si protragga, sin che ne incontri una di lei tangente, e dal contatto gli si tiri un' ordinata; saranno continuamente proporzionali l' ascissa dal centro, il detto semidiametro, e lo stesso semidiametro accresciuto della parte esterna.*

§. 135. *Cor.* III. E la sottangente PM della detta ellisse non è dupla dell' ascissa MA, come lo era nella parabola; ma le serba la variabile ragione di DM ad MC, cioè dell' ascissa dal vertice rimoto all' ascissa dal centro.

CAP. II.

DE' DIAMETRI CONJUGATI DELL' ELLISSE

§. 136. *Def.* IV. Due diametri di un' ellisse si dicono *conjugati tra loro*, se ciascuno di essi sia parallelo alle ordinate dell' altro. E quello di questi due diametri, che principalmente si consideri, suol chiamarsi *primario*, e l' altro poi *secondario*.

fig. 44. §. 137. *Scol.* Da un qualunque punto E dell'ellisse AED agli estremi di un suo diametro AD si tirino le due rette EA, ED; e pe' punti medj di queste due corde vi s' intendan condotti i due semidiametri CG, CP. Questi saranno conjugati fra loro. Imperocchè la retta CK, che passa pe' punti medj de' due lati AE, AD del triangolo EAD, dee esserne parallela alla base di esso, cioè alla ED, ch' è un' ordinata del diametro MP. E da ciò comprenderemo, che il semidiametro CG. sia parallelo alle ordinate dell' altro CP. Or così dimonstrando, che anche la CP sia parallela alle ordinate di CG, *i due semidiametri* CG, CP *in forza delle presente definizione saranno conjugati fra loro*. E queste cose servono a chiarire l' addotta definizione, ed a mostrarne la posizione de' diametri conjugati di un' ellisse, ed i loro varj sistemi.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

§. 138. *Ciascun diametro* AD *dell' ellisse* ABDE, *fig.* 33. *e la sua ordinata* BD *condottogli per lo centro, son due diametri conjugati.*

Dim. Per un qualunque punto F del perimetro ellittico ABDE, e per lo centro C conducasi la retta FCL, che incontri in L la parte opposta di tal curva. Ed oltre a ciò da' punti F, ed L si tirino al diametro AD la semiordinata FG, e l'ordinata LT, ed in fin si unisca la FT.

E poichè FC è uguale a CL*, i due triangoli * 119. equiangoli FCG, LCK avranno uguali i lati FG, LK. Ma l'è poi LK uguale a KT: dunque le due FG,KT, che per essere ordinate al diametro AD son tra se parallele, saranno altresì uguali fra loro. E quindi la FT sarà uguale, e parallela alla GK*. Or pe'due pa- * 33. I. rallelogrammi GH e CT le due rette GC e CK sono respettivamente uguali alle FH ed HT. Dunque siccome le prime di queste quattro grandezze son tra se uguali, per esser i triangoli FCG, LCK perfettamente uguali; così le altre due FH, HT saran pure tra se uguali. Il perchè la BE, che passa per lo punto medio della corda FT, e per lo centro dell' ellisse, sarà diametro di FT*: e la FT ordinata di BE, ch'è * 125. il diametro secondario di AD, sarà parallela ad AE diametro primario: e con ciò i due diametri AD, BE saran conjugati fra loro. C.B.D.

§. 139. *Cor.* 1. In questa curva la retta AM sia il parametro del diametro AD, di cui la BE n'è il

secondario. Sarà AM ad AD, come il quadrato di BC
* 129. al rettangolo ACD: cioè, prendendo i quadrupli di queste due grandezze, come BE^2 ad AD^2. *Dunque tra 'l detto diametro, e 'l suo parametro AK n'è medio proporzionale il suo diametro conjugato BE.*

§. 140. *Cor.* II. *E 'l quadrato di una semiordinata ad un qualunque diametro dell'ellisse starà al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici, come n'è al quadrato di un tal diametro quello del suo conjugato.*

§. 141. *Cor.* III. Descrivasi un cerchio, che abbia il medesimo centro dell'ellisse, e per raggio un semidiametro di essa. E poi tirata una retta per due intersezioni di queste curve, si unisca il punto medio di una tal corda col centro dell'ellisse. *Cotesta congiungente prodotta d'ambe le parti insino al perimetro dell'ellisse ne sarà un' asse*: per esserne anche perpendicolare alla detta corda, e quindi alle tangenti condottevi pe' suoi estremi. *E 'l suo conjugato sarà l' ordinata, che gli si meni per lo centro.*

§. 142. *Def.* V. Nell'ellisse il parametro di ciascun diametro può dirsi, che sia la terza proporzionale in ordine ad esso diametro, e 'l suo conjugato.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

§. 143. *Gli assi conjugati di un' ellisse son disuguali. E 'l maggiore di essi n' è il massimo diametro, il minore il minimo.*

fig. 41. *Dim. Part. I.* S' è possibile, sieno uguali fra loro gli assi conjugati AB ed MN dell' ellisse AMBN. Tirate ovunque ad uno di essi la semiordinata RX,

il quadrato di tal retta sarebbe uguale al rettangolo di AR in RB: imperciocchè quello sta a questo, come il quadrato di MN al quadrato di AB*. Ma il punto X * 140.
tocca la circonferenza del cerchio, che ha per diametro la BA*. Dunque cotesto circolo dovrebbe confon- * 35.III.
dersi colla proposta ellisse. Ch'è un assurdo.

Part. II. Si descrivano co' diametri AB ed MN i semicircoli ADB, NFM. Egli è chiaro, che le circonferenze di questi semicerchi non debbano tagliar l'ellisse in alcun punto: Poichè, se ADB, ch'è una delle dette periferie, suppongasi tagliar l'ellisse in X, ordinata la XR al diametro AB del semicerchio ADB, dovrebbe esserne il quadrato di RX uguale al rettangolo ARB, e quindi NM² uguale ad AB². Lo che ripugna alla prima parte.

Ciò premesso, dal centro C dell'ellisse AMBN si tiri ovunque il semidiametro CFD; sarà sempre la CE minore della CD, ed insiem maggiore della CF. Dunque ogni semidiametro dell'ellisse sarà minore del semiasse maggiore CB e maggiore del semiasse minore CM. E quindi il massimo de'diametri di tal curva dovrà esserne l'asse maggiore, e 'l minimo di essi il minore. C.B.D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

§. 144. *Le rette, che congiungono gli estremi di due* fig. 42.
diametri conjugati QF, EG *dell'ellisse* ABCD, *costituiscono un parallelogrammo uguale alla metà del rettangolo degli assi* AC, AD.

Dim. Essendo i semidiametri QH, ed HE respet-

tivamente uguali agli altri HF, ed HG, e l'angolo QHE uguale al suo verticale FHG, sarà la QE uguale alla FG, e l'angolo GFQ uguale all'altro FQE: onde le due QE, e GF, che si son mostrate uguali,
* 27 I. saran benanche parallele*, e la figura QEFG dovrà esserne un parallelogrammo.

Inoltre dagli estremi A e B del semiasse maggiore HA, o del minore HB, e dagli altri Q ed E de' semidiametri conjugati HQ ed HE si tirino le tangenti AL, BL, QM, EM all'ellisse ABE, che si uniran fra lo-
fig. 43. ro, come ne appare nella fig. 43.: e pe' punti Q e B si distendano le rette XQY, ZBV parallele alle BH e QH respettivamente, e poi congiungasi la BQ.

Ciò posto, il parallelogrammo BXYH è duplo del triangolo BQH, poichè tali figure han la stessa base BH, e son tra le medesime parallele BH, XY. Ma dello stesso triangolo QBH n'è anche duplo l'altro parallelogrammo QZVH, per esserne entrambi sulla medesima base QH, e fra le medesime parallele QH, ZV. Dunque saranno uguali i parallelogrammi BXYH, QZVH, e dovran serbare ugual ragione al terzo parallelogrammo IbSH. Or i parallelogrammi BXYH, ed IbSH sono come le loro basi HY, ed HS, vale a di-
* 134. re in duplicata ragione di HY ad HA*. Ed è ancora il parallelogrammo QZVH al medesimo parallelogrammo IbSH, come HV base del primo ad HI base del secondo, cioè in duplicata ragione di HV ad HE. Dunque sarà ancora HY : HA :: HV : HE, o sia il parallelogrammo BXYH all'altro BLAH, come il parallelogrammo QZVH al parallelogrammo QMEH, per esserne respettivamente di uguali altezze sì quelli, che questi. Il perchè essendosi mostrati uguali i parallelogrammi BXYH, QZVH, anche gli altri due BLAH, QMEH dovranno esser tra se uguali: e 'l saran pure

i triangoli BAH, QHE metà di essi. E prendendo i *fig. 42.*
quadrupli di questi triangoli n' emergerà il parallelogrammo ABCD uguale all' altro QEFG. Ma il primo di questi parallelogrammi è metà del rettangolo degli assi LKRS. Dunque sarà benanche l'altro parallelogrammo QEFG metà del detto rettangolo degli assi. C. B. D.

§. 145. *Cor.* I. Compito il parallelogrammo MNOP da' diametri conjugati QF, EG, si comprende agevolmente, che i parallelogrammi RKLS, MNOP sien quadrupli de' parallegrammi BLAH, QMEH. Dunque dovran quelli uguagliarsi fra loro al par di questi.

§. 146. *Cor.* II. E di quì può rilevarsi, *che tutt' i parallelogrammi circoscritti in tal modo ad un' ellisse sieno uguali al rettangolo degli assi, e quindi fra loro uguali.*

§. 147. *Cor.* III. Si tiri l' ordinata ET al semiasse minore HB; sarà HT : HB :: HE : HI :: HV : HE². Ma nel progresso della presente dimostrazione si è veduto esserne HY : HA :: HV : HE. Dunque sarà benanche HY : HA :: HT : HB. *fig. 43.* * 134.

§. 148. *Cor.* IV. Essendo poi HY : HT :: HA : HB, e quindi $HY^2 : HT^2 :: HA^2 : HB^2$, sarà per la 19. El. V. $HA^2—HY^2$ ad $HB^2—HT^2$, come HA^2 ad HB^2, o' come il rettangolo AYP a QY^2. Dunque sarà QY^2 uguale ad $HB^2—HT^2$, o al rettangolo BTR. E così pure può rilevarsi, che il quadrato di ET adegui il rettangolo AYP. * 140.

§. 149. *Cor,* V. *Cioè se dagli estremi di due semidiametri conjugati di un' ellisse conducansi due semiordinate agli assi di una tal curva; questi saran da quelle divisi proporzionalmente. E 'l rettangolo di coteсti due segmenti in ciascun asse dovrà pareggiare il quadrato di quella delle dette semiordinate, che n'è parallela ad un tal asse.*

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

fig. 44. §. 150. *Nell' ellisse* ARDQ *la somma de' quadrati di due qualunque diametri conjugati* GL, MP *è quanto quella de' quadrati degli assi* AD, RQ.

Dim. Si tirino dagli estremi G, ed M de' semidiametri conjugati GC, CM le ordinate GB, MN agli assi AD, RQ.

E poichè il quadrato dell' ipotenusa CG nel triangolo rettangolo GBC è uguale a' quadrati de' cateti BC e BG, e per la stessa ragione CM² è anche uguale a CN² con MN²; sarà la somma de' quadrati di GG e di CM uguale alla somma de' quattro quadrati di BC, di BG, di CN, e di NM. Intanto si surroghino a CG², ed NM² i rettangoli RNQ, ABD loro uguali rispetti-
* 148. vamente* : sarà CG² con CM² uguale alle seguenti gran-
* 5. II. dezze BC², RNQ, CN², ed ABD, o finalmeute* ad AC² con CQ² (intendendosi unite insieme la prima di quelle quattro grandezze con la quarta, e la seconda colla terza). Or essendo il quadrato di CG col quadrato di CM uguale al quadrato di AC col quadrato di CQ; prendendo i loro quadrupli, saranno i due quadrati de' diametri conjugati GL, PM uguali a' quadrati degli assi AD, RQ. C. B. D.

§. 151. *Cor.* 1. Congiungendo con una retta gli estremi di due qualunque semidiametri conjugati di un' ellisse viensi a formare *un triangolo di una costante aja*: cioè uguale a quella di un triangolo rettangolo che ha per cateti il semiasse maggiore, e 'l minore di tal curva.

§. 152. *Cor.* II. E se que'due semidiametri compongansi ad angolo retto, l'ipotenusa di questo nuovo triangolo sarà di una costante grandezza, dovendo sempre pareggiar quella dell'anzidetto triangolo rettangolo. Or questo geometrico *paradosso*, che vi ha luogo benanche per due diametri conjugati, è un principio di risoluzione del seguente Problema, e di tante altre ricerche affini.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

§. 153. *Dati di grandezza, e di posizione i due semidiametri conjugati* GB, GK *di un' ellisse, determinarne i semiassi conjugati.* fig. 45.

Solut. Dal punto G si elevi al semidiametro GB la perpendicolare GA uguale all'altro semidiametro GK: ed unita la BA si descriva col diametro BA il semicerchio AGB: e sulle rette BA, e BG si abbassino le perpendicolari GO, KH da' punti G e K. Inoltre si prenda nella GO la parte (*) OE, che stia ad essa GO, come il cateto KH all'ipotenusa KG del triangolo rettangolo GHK. E finalmente per lo punto E si distenda la EC parallela alla AB, e si congiungan gli estremi di questa retta con uno degl' incontri del semicerchio e della EC. *Le congiunte* AC, BC *saranno i semiassi addimandati.*

(*) E da ciò può conoscersi, che in questo Problema non siavi il caso impossibile.

Si compia il parallelogrammo ET. E poichè per costruzione sta KH a KG, o alla sua uguale AG, come la OE o la CT alla GO, sarà permutando HK: CT :: AG : GO :: AB: BG pe' triangoli simili AGO, ABG. E sarà quindi il rettangolo di KH in BG uguale all' altro di CT in AB, o di AC in BC, essendo AB: AC :: BC : CT, pe' triangoli simili BAC, BCT. Vale a dire il rettangolo delle due rette AC, e BC è quanto il parallelogrammo, che compiesi da'due semidiatri conjugati GB, GK. Ma la somma de' quadrati delle AC, e BC ne uguaglia la somma de'quadrati de' detti semidiametri, essendo sì l' una, che l' altra uguale ad AB² per la natura del cerchio AGB. Dunque le
* 152. AC, BE saranno i richiesti semiassi*.

§. 154. *Cor.* I. Protraggasi la retta AG, sinchè ne incontri in F la BF tangente del semicerchio in B. Saranno continuamente proporzionali le tre rette AG,
* 8. VI. GB, GF*. Dunque la GF sarà il semiparametro del
* 142. semidiametro AG nella detta ellisse*.

§. 155. *Cor.* II. E se la stessa AG sia il semiasse minore della proposta ellisse, e l' altra AC il maggiore; l' arco GC sarà il luogo, ove terminano le applicate, che ne dinotano le lunghezze di tutti i semidiametri di questa curva. E si conoscerà chiaramente esser la GF la massima di coteste intercette, e la CD la minima.

§. 156. *Cor.* III. *Dunque nell' ellisse il massimo parametro è quello, che all' asse minore si conviene: e l' asse maggiore avrà poi il minimo parametro, che parametro principale suol chiamarsi.*

§. 157. *Cor.* IV. Dal punto A conducasi la corda AQ al punto medio del semicerchio AQB; questa retta dovrà dinotare quel semidiametro della proposta ellisse, il quale ne pareggi il suo conjugato, e con ciò

benanche il suo semiparametro. E quindi il *quadrato di ciascuna semiordinata a questo diametro sarà uguale al rettangolo delle ascisse d' amendue i vertici di esso*. * 140.

§. 158. *Scol.* Con queste geometriche guide si potrebbono con pari agevolezza risolvere i seguenti Problemi. *Dato l' asse maggiore, e 'l minore di un' ellisse, determinarne la magnitudine di due semidiametri conjugati, che vi comprendano un angolo dato. O determinarne la loro vicendevole magnitudine e posizione dall' esser dato l' angolo, onde uno di essi inclinasi a que' dati assi. Dati gli assi della detta curva, e la magnitudine di un semidiametro di essa, ritrovare la grandezza, e la posizione del suo conjugato ec.* Un giovane, che s' instituisce in questi Elementi, potrà dal *Trattato Analitico delle curve coniche* (*) rilevarne le varie ricerche, che si posson fare in questo argomento, e le diverse difficoltà, che vi s' incontrano. Ed ei, se attentamente il contempli, potrà intenderne la ragione, perchè mai in questo corso geometrico, ed in quell' altro analitico abbiansi dovuto impiegare artifizj diversi, e quasi incomunicabili fra loro nel conseguirvi le medesime verità con eleganza. Ma nella Teoria de' diametri conjugati delle Iperboli ei vi scorgerà un maggior divario ne' ripieghi euristici, e dimostrativi, che vi si dovran praticare.

§. 159. *Def.* VI. Se da un punto di un' ellisse conducansi due rette, l' una perpendicolare alla tangente di questa curva in quel punto, e l' altra perpendicolare ad un di lei asse; la parte di questo asse che ne troncano quelle due rette, si dirà *la sunnormale corrispondente al detto punto*.

(*) Stampato qui in Napoli nell' anno 1814.

fig. 35. Per ciò intendere, sia la retta NH perpendicolare alla tangente NP dell' ellisse AND nel contatto N, e l'altra NM si cali dal punto N perpendicolare alla DA, ch' è uno degli assi conjugati della detta ellisse; la parte MH di cotesto asse troncatane da quelle due rette sarà la sunnormale corrispondente al proposto punto N.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

§. 160. *Nell' ellisse* AQD *la sunnormale* MH *sta ad* MC *ascissa dal centro, com' è* AO *parametro dell' asse* AD *al medesimo asse.*

Dim. Si prolunghi l' asse AD, finchè v' incontri la tangente NP in P. Sarà per lo triangolo rettangolo PNH il quadrato di NM uguale al rettangolo PMH. Ma per la sottangente PM il rettangolo AMD è uguale all' altro PMC. Dunque sarà NM^2: AMD :: PMH : PMC. Or di queste due ragioni la prima è uguale
* 129. a quella di AO ad AD*, e la seconda è quanto quell' altra di MH ad MC. Dunque sarà MH: MC :: AO: AD. C.B.D.



CAP. III.

DELLE TANGENTI, E DELLE SEGANTI DELL' ELLISSE.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

§. 161. *Dato il punto* R *fuori l' ellisse* AMD, *ti- rarle da esso una tangente.* fig. 46.

Costruz. Si unisca il centro della figura col dato punto R, e si ritrovi la CN terza proporzionale dopo le due CR, e CA. Per N distendasi la retta M*m* parallela alla tangente dell' ellisse in A: e si uniscano le rette RM, R*m*; *queste congiunte saranno le tangenti condotte dal punto dato alla sottoposta ellisse.*

La dimostrazione è chiara dalla Prop. 2., e dallo Scol. 1. Prop. 8.

§. 162. *Cor.* La retta CR, che unisce il centro dell' ellisse col concorso di due tangenti, dovrà dividere per metà la corda distesavi pe' contatti.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

fig. 47. e 48. §. 163. *Se le due corde* FH, *e* QA *dell' ellisse* QHF *s' incontrino dentro di tal curva*, o *fuori di essa*; *i rettangoli* FKH, QKA *de' loro segmenti saranno come i quadrati delle due tangenti* ME, NE *parallele ad esse corde*.

Dim. S' intendano le tangenti, e le corde prodotte insin che incontrino in G, Z, P, e T i semidiametri CN, CM tirati pe' contatti. E poi per H ed A, ove le seganti tagliano la curva, si distendano le SHR, ed AL parallele alle tangenti NE, ME. Sarà il triangolo PSH uguale al corrispondente quadrilineo NSRZ* : sicchè ponendo loro di comune il sottoposto triangolo SCR, dovrà risultarne il trapezio PHRC uguale al triangolo NCZ. E dimostrando in simil modo esser l' altro trapezio LATC uguale allo stesso triangolo NCZ, dovranno i due trapezj PHRC, LATC esser uguali tra loro. Laonde prendendo la differenza di questi trapezj dal comun trapezio PKTC, ne rimarrà il trapezio HKTR uguale all' altro PKAL.

* 118.

Ciò premesso, i triangoli simili DHR, DKT son come i quadrati de' loro lati omologhi DH, DK: dunque sarà la differenza de' triangoli, cioè il trapezio HKTR al triangolo DKT, come la differenza de' quadrati di DH, e di DK, val quanto dire il rettangolo FKH, al quadrato di DK. Ma per la simiglianza de' triangoli DKT, MEZ sta DKT : MEZ :: $DK^2 : ME^2$. Dunque le tre grandezze HKTR, DKT, MEZ sono in ordinata razione colle altre FKH, DK^2, ME^2: onde sarà *ex aequo* HKTR : MEZ :: FKH : ME^2.

In simil guisa dimostrasi, che il trapezio PKAL serbi al triangolo GNE la medesima ragione del rettangolo QKA al quadrato di NE. Per la qual cosa essendo le due ragioni di HKTR ad MEZ, e di PKAL a GNE uguali tra loro, perciocchè il trapezio è uguale al trapezio, e 'l triangolo al triangolo; dovrà eziandio il rettangolo FHK serbare al quadrato di ME la stessa ragione, che ha il rettangolo QKA al quadrato di NE. Onde permutando dovrà essere FKH : QKA :: $ME^2 : NE^2$. C. B. D.

§. 164. *Cor.* I. Se due corde di un' ellisse s' interseghino nel centro della figura (nel qual caso ciascuna di esse n' è un diametro); i rettangoli de' loro respettivi segmenti, cioè i quadrati di cotesti semidiametri saranno proporzionali a' quadrati delle tangenti parallele ad esse corde.

§. 165. *Cor.* II. Val quanto dire, *le due tangenti menate da un medesimo punto ad un' ellisse non sono sempre uguali fra loro, come avverasi nel cerchio, ma nella ragione de' diametri ad esse paralleli.*

§. 166. *Cor.* III. Inoltre se una corda dell' ellisse ne seghi due ordinate di un qualunque di lei diametro; i rettangoli de' segmenti di queste ordinate saran proporzionali a' rettangoli de' corrispondenti segmenti di quella corda. Sulla qual cosa leggansi i Coroll. 1. e 2. Prop. XII. Parab.

§. 167. *Cor.* IV. Se dal triangolo PSH, e dal quadrilineo NSRZ si tolga il comun trapezio NSHO, dovrà rimanervi il triangolo PNO uguale all'altro trapezio HOZR. Onde potrà conchiudersi, come qui sopra, esserne HOZR : MEZ :: FOH : ME^2. Ma il triangolo PNO sta al suo simile GNE, come NO^2 ad NE^2. Dunque sarà FOH : ME^2 :: NO^2 : NE^2. E permutando il rettangolo FOH e 'l quadrato di NO, saran come i fig. 48.

quadrati delle tangenti ME, NE, o de' diametri ad esse paralleli.

§. 168. *Cor.* v. Cioè *se da un punto conducansi ad un' ellisse una tangente ed una segante: il rettangolo dell' intera segante nella sua parte esterna, e 'l quadrato della tangente saranno come i quadrati de' diametri, che sono paralleli ad esse rette.*

§. 169. *Scol.* 1. Un cerchio non può segare in quattro punti un' ellisse. E se una di coteste due curve ne seghi l' altra in due punti, può benanche toccarla in un altro, senza che più la incontri. Or queste cose, ed altre di simile argomento si possono colla luce de' principj preposti raccorre per quelle vie, ch' io nella parabola segnai nel §. 67. E nel seguente libro dimostrerò generalmente in quanti punti si possan segare due curve coniche: e quanti punti si richieggano, ed in qual posizione, sicchè per essi potrem descrivere una parabola, un' ellisse, o un' iperbole.

fig. 40. §. 170. *Scol.* 2. Se le due corde NO, FT dell' ellisse ABDE, le quali s' interseghino in P, sieno parallele a' diametri conjugati BE, AD di essa curva; l' addotta dimostrazione non potrà confarsi a questo caso, e gioverà modificarla nel seguente modo. Dal punto P delle loro intersezioni si tiri comunque la segante QPR, e per lo centro C le si distenda la parallela LF. Sarà il rettangolo NPO all' altro QPR, come BE^2 ad FL^2. Ma per la medesima ragione è anche QPR : FPT :: FL^2 : AD^2. Dunque sarà *ex aequo* NPO : FPT :: BE^2 : AD^2.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

§. 171. *Se da un punto* A *conducansi all' ellisse* GNE *le due tongenti* AB, AC, *ed una qualunque segate* ADE; *questa segante sarà divisa armonicamente da una tal curva, e dalla retta fra' contatti.* *fig.* 24.

Le dimostrazioni di questo Teorema, e de' due seguenti sono identiche a quelle delle Prop. 16, 17, e 18. della Parabola.

§. 172. *Cor.* Qui anche si verifica esserne divisa armonicamente la retta ESV, la qual si conduce dall' estremo E della segante AE al punto medio S della BC tra' contatti, e poi si distende insino alla retta AV parallela alla BC.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

§. 173. *Se dal punto* R *cadano sull' ellisse* BFAT *le due tangenti* RF, RG, *e le due seganti* RB, RT; *e poi si tiri la retta* FG *fra' contatti, e le altre due* AV, BT *per le sezioni superiori, e per le inferiori respettivamente; queste tre rette o saranno fra loro parallele, o dovran concorrere ad uno stesso punto.* *fig.* 25.

Ved. Prop. 17. Parab.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

fig. 26. §. 174. *Se da un qualunque punto* K *preso entro l' ellisse* ABS *si distenda come ne piaccia la corda* AS, *e pe' suoi estremi le tangenti* AV, *ed* SV *ad essa curva; il concorso delle dette tangenti dovrà allogarsi in una retta data di posizione.*

Dim. La retta, che congiunge il centro C dell' ellisse SBD col proposto punto K, si protragga fuori la curva, sinchè la GE sia terza proporzionale dopo la congiunta GK, e 'l semidiametro GF. E poi per E si distenda la EV parallela alla tangente dell' ellisse in F. Cotesta parallela sarà quella retta data di posizione. Lo che può dimostrarsi come nella Parabola Prop. 18.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

§. 175. *Se dagli estremi* A, *e* D *di un qualunque diametro* AD *dell' ellisse* AMD *si tirino ad essa curva le tongenti* AQ, DS, *che ovunque ne incontrino una tangente laterale* SQ; *il rettangolo delle tangenti verticali* DS, AQ *sarà sempre uguale al quadrato di* CB, *semidiametro conjugato di* AD.

fig. 49. *Dim.* Dal contatto M si tirino a' semidiametri conjugati CA, CB le semiordinate MN, ML, e si distenda la tangente laterale SQ, finchè convenga in R col diametro DA. Saranno continuamente proporzionali le

tre rette CN, CA, CR*, onde il quadrato della media CA dovrà pareggiare il rettangolo dell'estreme CN, CR. Dunque la differenza del quadrato di CA dal quadrato di CR dovrà uguagliare la differenza del rettangolo RCN dallo stesso quadrato di CR; cioè il rettangolo DRA* sarà uguale all'altro CRN*. E quindi starà RD : RC :: RN : RA. Ma le rette DS, CT, NM, AQ, a cagion de' triangoli simili DRS, CRT, NRM, ARQ, son proporzionali alle RD, RC, RN, RA. Dunque sarà ancora DS : CT :: NM : AQ; e quindi il rettangolo di DS in AQ sarà uguale a quello di CT in NM, o in CL, cioè al quadrato di CB, per esser continuamente proporzionali le tre rette CL, CB, CT*. C. B. D. * 134. * 6. II. * 2. II. * 134.

§. 176. *Scol.* Di questo principio si valse il sommo Newton per descrivere una curva conica, cui fosser tangenti cinque rette date di posizione.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

§. 177. *Poste le medesime cose della Prop. prec.*, *il rettangolo* SMQ *delle parti della tangente laterale, che restano fra il contatto e le tangenti verticali, adegua il quadrato del semidiametro* CG *parallelo ad essa tangente laterale.* fig. 40.

Ed all' istesso quadrato di CG *l' è pure uguale il rettangolo* TMR *delle parti della tangente laterale, che sono tra 'l contatto, e gl' incontri de' detti semidiametri conjugati* CA, CB.

Dim. Part. I. Le due ragioni di DS ad SM, e di QA a QM sono uguali fra loro, perchè uguali a quel-

* 165. la di CB a CG*. Dunque la ragion, ch' emerge dalla loro composizione, sarà duplicata di una di esse, o duplicata di quella di CB a CG: cioè a dire starà DS × AQ : SM × MQ :: CB^2 : CG^2. Ma si è qui sopra mostrato il rettangolo di DS in AQ uguale al quadrato di CB: dunque all'altro quadrato di CG dovrà esser uguale il rettangolo di SM in MQ.

Part. II. Inoltre il rettangolo RMT sta all' altro QMS in ragion composta di RM ad MQ, e di MT ad MS: ma di queste due componenti la prima è uguale a quella di RN ad NA, e la seconda ne pareggia quest' altra di NC ad ND. Dunque il rettangolo RMT starà all' altro QMS in ragion composta di RN ad NA, e di NC, ad ND, vale a dire quelle due grandezze saran come il rettangolo di RN in NC all'altro di NA
* 135. in ND. Or questi sono uguali fra loro*: dunque sarà il rettangolo RMT uguale all' altro QMS, o a CG^2. C. B. D.

CAP. IV.

De' Fuochi dell' Ellisse.



§. 178. *Def.* VII. I *fuochi di un' ellisse* son que' due punti dell' asse maggiore di una tal figura, ove ciascun' ordinata, che vi si conduce, è quanto il parametro principale.

§. 179. *Scol.* Il semiasse maggiore di un' ellisse, il minore, e 'l semiparametro principale sono tre rette continuamente proporzionali, per esser tali i loro doppj. Dunque la terza di quelle grandezze sarà minore della prima. E quindi se nella CQ, semiasse mi- fig. 50. nore dell' ellisse AQB, tolgasi dal centro C la CG uguale al semiparametro principale, e per G poi si distenda la NGM parallela all' asse maggiore AB, tal retta dovrà incontrar l' ellisse ne' due punti M, ed N: e le perpendicolari MF, NV, che da questi punti si calino sul detto asse, ne segneranno i due fuochi F, ed V. Lo che serve a mostrarne la possibilità del definito, e 'l modo ancora di ottenerlo.

§. 180. *Cor.* I fuochi dell' ellisse serbano ugual distanza dal centro di una tal curva.

§. 181. *Def.* VIII. L' *eccentricità* di un' ellisse è la distanza del centro di una tal figura da ciascun fuoco di essa curva. Cioè a dire ella n' e dinotata dalla retta FC, o dall' altra VC.

Ed un' ellisse si dirà *più*, o *meno eccentrica*, secondochè sia maggiore, o minore il rapporto dell' eccentricità al semiasse. L' ellissi poco eccentriche son finitime a' cerchi: e le molto eccentriche son come

due parabole uguali, che si riguardino colle concavità loro, ed abbiano per diritto i loro assi assai lunghi.

§. 182. *Scol.* Le definizioni *de' due punti di sublimità dell' ellisse*, *delle due linee di sublimità*, e *de' rami* son quelle stesse, che io recai nel I°. Libro al Capo de' fuochi della Parabola.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

fig. 60. §. 183. *La retta* FP, *che unisce il fuoco* F *dell' ellisse* APB *con un estremo* P *dell' asse minore* PQ, *è uguale al semiasse maggiore* AC. *E ciò conduce a ritrovarne agevolmente i fuochi.*

E l' eccentricità CF *n' è media proporzionale tra il semiasse maggiore* AC, *e la differenza di esso dal semiparametro principale.*

Dim. Part. I. Essendo per le verità precedenti le tre rette AB, PQ, AL continuamente proporzionali, anche tali dovran essere le metà loro AC, CP, FM. E perciò sarà $AC^2 : CP^2 :: CP^2 : FM^2$. Ma la prima
* 140. di queste ragioni* è quanto quella del rettangolo AFB al quadrato di FM: dunque sarà $AFB : FM^2 :: CP^2 : FM^2$, e quindi AFB uguale a CP^2. Aggiungasi di comune CF^2 alle grandezze uguali AFB, e CP^2; dovrà emergerne AC^2 uguale ad FP^2, e quindi AC uguale ad FP. Per la qual cosa, se prendasi per centro un estremo dell' asse minore e per intervallo il semiasse maggiore della detta ellisse, il cerchio, che si descrive, ne segnerà nell' asse i due fuochi di una tal curva.

Part. II. Prendasi nella FP la parte PE uguale
al semiparametro principale, cioe alla FM, e si uni-
sca la CE. Saranno continuamente proporzionali le
tre rette PF, PC, PE*. Con che, essendo PF : PC :: * 142.
PC : PE, i due triangoli FCP, CPE, che han pro-
porzionali i lati intorno al comune angolo CPF, avran-
no uguali gli altri due angoli PCF, CEP* : onde * 6. VI.
convien, che l'angolo CEP sia retto al par dell'altro
PCF, e che stia PF : FC :: FC : FE. Cioè a dire
l' eccentricità CF dee essere media proporzionale tra 'l
semiasse PF, e la FE differenza di esso e del semi-
parametro principale. C.B.D.

§. 184. *Cor.* I. *Il quadrato del semiasse minore di un' ellisse è uguale al rettangolo delle parti dell'asse segnatevi da ciascun fuoco. E 'l quadrato dell eccentricità della detta curva n' è la differenza de' quadrati del semiasse maggiore, e del minore.*

§. 185. *Cor.* II. Per esser continuamente propor-
zionali le tre rette CA, CP, FM, n' è CA^2 : CP^2 ::
CA : FM :: AB : AL. Ma nella ragione di AB ad
AL sta una qualunque ascissa CO, presa dal centro
dell' ellisse, alla sua corrispondente sunnormale DO*, * 160.
intendendosi praticato quel che si è detto nella definizio-
ne VI. Dunque sarà CA^2 : CP^2 :: CO . DO, e con-
vertendo * CA^2 a CF^2, come CO a CD, o come il * 183.
rettangolo KCO all' altro KCD. Ed essendo CA^2 u-
guale a KCO^*, sarà anche CF^2 uguale a KCD. * 134.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

fig. 51. §. 186. *Se da' fuochi* F *ed* V *dell' ellisse* RMS *conducansi le due rette* FM, VM *ad un medesimo punto* M *del perimetro di essa; questi due rami dovranno esserne ugualmente inclinati alla tangente della detta curva in quel punto. Cioè l' angolo* FMP *sarà uguale all altro* VME.

Dim. Da' fuochi F ed V si abbassino le perpendicolari FL ed VG alla tangente EP, cui si tiri dal punto M la perpendicolare MO. Sarà VO : FO :: MG : ML, per lo parallelismo delle tre rette FL, OM, VG. E poichè qui sopra si è dimostrato essere il quadrato di CF uguale al rettangolo di CP in CO, dee stare CO : CF :: CF : CP. Dunque prendendo la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti,
* 12. e 19 VI. come la differenza di quelli alla differenza di questi*, avressi VO : VP :: OF : FP, e permutando VO : OF :: VP : FP. Ma la prima di queste due ragioni si è mostrata uguale a quella di MG ad ML : e la seconda pe' triangoli simili VPG, FPL ne uguaglia quest' altra di VG ad FL. Dunque sarà MG : ML :: VG : FL; ed i due triangoli VMG, FML, che han le condizioni della settima del VI° degli Elementi, dovranno avere uguali gli angoli VMG, FML. C. B. D. (*).

(*) La teoria de' fuochi, che rilevasi nelle curve coniche dalla loro genesi per sezione, suol esserne difficoltosa. Ma ella non pertanto qui vedesi e pro de' giovanetti agevolata.

§. 187. *Cor.* I. Pe 'l fuoco V si meni la VF parallela al ramo FM, che procede dall' altro fuoco F; sarà l' angolo interno MEV di coteste parallele uguale all' esterno FMP, o al suo uguale VME. Laonde il triangolo MVE sarà isoscele, e la detta perpendicolare VG dovrà dividerne per metà la base ME. Inoltre, conducendo per lo centro C la *tCr* parallela alla tangente PM distesavi per l' estremo di quel ramo, anche il triangolo *tMr* dee essere isoscele, essendo tra se uguali gli angoli in *r*, e *t* al per de' loro respettivi alterni *r*ME, *t*MP.

§. 188. *Cor.* II. Si unisca la retta CG; saranno tra se uguali non meno le rette EG e GM, come si è detto nel preced. Coroll., che le altre VC e CF. Dunque la retta CG dovrà esser parallela alle due FM, ed VE.

§. 189. *Cor.* Cioè *se da un fuoco di un' ellisse si meni la perpendicolare od una di lei tangente, e poi si unisca il centro della figura col punto di una tal incidenza; cotesta retta dovrà esser parallela al ramo tirato al contatto dall' altro fuoco.*

§. 190. *Cor.* IV. E viceversa: *se dal centro dell' ellisse conducasi la parallela al ramo che passa per lo contatto, e poi si unisca l' altro fuoco col concorso della parallela, e della tangente; cotesta congiungente dovrà essere perpendicolare alla tangente suddetta.*

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

fig. 52. §. 191. *Poste le medesime cose del Teorema precedente, il rettangolo de' rami VM, ed MF condotti ad uno stesso punto dell' ellisse, è uguale al quadrato del semidiametro* CB *conjugato a quello, che passa pe 'l detto punto.*

Dim. I semiassi conjugati CA, CT della proposta ellisse protaggansi insino alla tangente QM di essa curva. Inoltre si meni la CL parallela al ramo VM, e si unisca la FL. Sarà la congiunta FL perpendicolare
* 190. alla tangente LM*.

Ciò posto i due triangoli rettangoli FLG, QCG avendo di comune l' angolo acuto C sono equiangoli: onde dovrà esserne GF : GQ :: GL ; GC. Ma l' è poi GL : GC :: GM : GV, per esser simili i due triangoli CGL, VGM. Dunque sarà GF : GQ :: GM GV. Il perchè avendo i due altri triangoli GMV, GQF le condizioni della sesta del VI°. degli Elementi, avran pure uguali gli angoli GVM, GQF. Ma son poi ugua-
* 186. li gli angoli GMV, QMF*: dunque i dua triangoli GVM, FQM saranno altresì equiangoli, e simili. Sicchè dovendo esser GM : MV :: MF : MQ, sarà il rettangolo delle medie VM, ed MF uguale a quello dell' estreme GM, ed MQ, cioè al quadrato di
* 177. CB*. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

§. 192. *Se da' fuochi* V *ed* F *dell' ellisse* AMS *conducansi ad un medesimo punto* M *del perimetro di essa curva le due rette* VM *ed* MF; *la somma di questi due rami sarà uguale all' asse maggiore* AS. fig. 52.

Dim. Il quadrato delle due VM ed MF considerate come una sola retta è uguale alla somma de' quadrati di VM, ed MF una col doppio rettangolo di VM in MF[a]. Dunqu' ei sarà uguale alla somma di $2CF^2$ a 4 II.
e di 2CM (*) con $2CB^2$[b]. Ma la somma de' quadrati de' b 191.
semiassi conjugati CM e CB è uguale alla somma de' quadrati de' semiassi conjugati CT, e CA. Dunque sarà il quadrato delle due VM, ed MF come una sola retta uguale a $2CF^2$ con $2CT^2$ con $2CA^2$, cioè a $2CS^2$ con $2CA^2$:
essendo come ho quassù dimostrato CF^2 con CT^2 uguale[c] c 183.
a CS^2. E quindi quel quadrato delle due VM ed MF sarà uguale a $4CA^2$: e la somma di essi rami VM, ed MF dovrà pareggiare 2CA, o l' asse maggiore AS. C.B.D.

§. 193. *Cor.* 1. Sieno le VE, e CG parallele al fig. 51.
ramo FM; saran queste tre rette equidifferenti, come il sono le loro analoghe PV, PC, PF. Dunque la media CG sarà suddupla dell' estreme FM ed VE,
o delle FM ed MV[a]. Cioè CG sarà uguale a CR. a 187.
E per lo pararallelogrammo MtCG sarà CG uguale ad Mt, o ad Mr.

(*) Vedi la Nota alla Prop. XIII. Elem. II.

§. 194. *Cor.* II. Cioè *se per lo centro di un'ellisse si tiri la parallela ad una di lei tangente, ed ella poi si distenda, finchè ne incontri i rami menati al contatto; le parti di questi rami, che la detta parallela ne tronca verso il contatto, saranno respettivamente uguali al semiasse maggiore.*

§. 195. *Cor.* III. *Ed al medesimo semiasse maggiore sarà uguale la retta, che dal centro dell' ellisse conducesi parallela ad un ramo, e si estende insino alla tangente tirata all' ellisse dall' estremo di esso.*

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

fig. 53. §. 196. *Se ad un qualunque punto* M *dell' ellisse* BMR *conducansi il ramo* FM, *e la normale* MN, *e dal punto* N, *ove la normale ne incontra l'asse, si abbassi la* NE *perpendicolare al detto ramo; la parte* ME, *che da questa quella ne tronca verso la curva, sarà uguale al semiparametro principale* (*).

Dim. Si ordini all' asse la retta ML, e dal centro dell' ellisse conducansi le tre rette CG, CP, CS respettivamente parallele alle altre tre MN, ML, ME. Ed essendo le due MN ed ME parallele alle altre CG e CS, l' angolo NME compreso dalle due prime di queste quattro rette sarà uguale all' angolo GCS, che contiensi dalle altre due. Imperocchè prodotta la MN,

(*) La perpendicolare, che si eleva alla tangente di una curva dal contatto, e vi si protrae insino all'asse, suol chiamarsi la *normale* di essa curva in quel punto: come si è detto nel Lem. 3.

finche ne incontri la SC in V, sarebbe l'angolo NME uguale ad MVS alterno delle parallele ME, SC, e lo stesso MVS uguale a GCS esterno delle altre parallele MN, CG. E quindi i due triangoli NEM, CGS, che son rettangoli in E, ed in G, avendo uguali quegli angoli acuti NME, GCS saranno equiangoli, e simili. E gli altri due triangoli CGP, NLM rettangoli in G ed L, che han pure uguali gli angoli acuti NML, GCP, per esser le due rette CG, e CP parallele alle altre MN ed ML, dovranno esser benanche simili fra loro.

Intanto dalla somiglianza de' due triangoli NEM, CGS comprendesi dover essere ME : MN :: CG : CS; e per la similitudine degli altri due NLM, CGP dee stare MN : ML :: CP : CG. Dunque per ugualianza perturbata dovrà essere ME : ML :: CP : CS, e quindi il rettangolo di ME in CS sarà uguale al rettangolo di ML, o della sua uguale Ct in CP. Ma questo rettangolo è uguale al quadrato del semiasse conjugato CR*, * 134.
o al rettangolo del semiasse maggiore CB nel semiparametro principale*. Dunque anche il rettangolo di CS * 139.
in ME sarà uguale al rettangolo di CB nel semiparametro principale. E quindi essendo la CS uguale alla CB semiasse maggiore*, anche la ME dovrà uguagliare * 195.
il semiparametro principale. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

fig. 54. §. 197. *Se da' fuochi* F *ed* V *dell' ellisse* MBR *si abbassino le perpendicolari* FL *ed* VD *ad una qualunque di lei tangente* DP, *il rettangolo di queste perpendicolari sarà sempre uguale al quadrato del semiasse minore* CR.

E 'l rettangolo de' rami FM *ed* MV *tirati al contatto* M *serberà al quadrato della normale* MN *la costante ragione dell' asse maggiore al parametro di esso.*

Dim. Part. I. Si uniscano le rette CL, CD, e poi la CL si protragga, finchè ne incontri la DV in T: saranno le rette CL e CD respettivamente
* 193 uguali alle CB e CA*. Di più avendo i due triangoli equiangoli FCL, ed VCT uguali i lati CF, CV dovranno avere gli altri lati CL ed FL respettivamente uguali a' lati CT e TV. Dunque un cerchio, che si descriva col centro C intervallo CB, dovrà passare pe' punti L, D, A, T.

Ciò supposto il rettangolo di FL in VD è lo stesso, che l'altro di TV in VD. Dunque siccome questo
* 35 III rettangolo è uguale a quello di VA in VB*, cioè a dire
* 184 al quadrato di CR: così il rettangolo delle perpendicolari FL, ed VD dovrà essere uguale al quadrato del semiasse minore CR.

Part. II. Si cali la NE perpendicolare al ramo FM; sarà (come si è dimostrato nel Teor. prec.) l'angolo FML uguale all'altro ENM, e quindi il triangolo NEM rettangolo in E sarà simile al triangolo FLM rettangolo in L, e con ciò anche simile all' altro

VDM. Or dalla similitudine de' triangoli FLM, NEM rilevasi esserne FM : FL :: NM : ME : e par la simiglianza degli altri due VDM, NEM dee stare VM : VD :: NM : ME. Dunque il rettangolo di FM in VM sarà al rettangolo di FL in VD, o al quadrato di CR che gli è uguale, come il quadrato di NM al quadrato di ME. Onde sarà permutando FM × MV : NM^2 :: CR^2 : ME^2. Ma sta CR^2 ad ME^2 come l'asse maggiore al suo parametro*: dunque sarà eziandio il rettangolo de' rami FM ed MV al quadrato della normale MN, come l'asse maggiore al suo parametro. C.B.D. * 196. e 142.

§. 198. *Coroll. La circonferenza del cerchio circoscritto all' ellisse è il luogo degli estremi delle perpendicolari calate da' fuochi di essa curva sulle tangenti laterali, che vi si posson condurre.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

§. 199. *Nell' ellisse il ramo* FR *è quanto la semiordinata condotta all' asse pel suo estremo, e distesa insino alla tangente, che procede dal punto di sublimità verso lo stesso ramo. Cioè a dire* FR *è uguale a* PN. fig. 55.

E lo stesso ramo FR *sta alla perpendicolare* RG, *che dal suo estremo si cala sulla* DG *linea di sublimità della curva, come l' eccentricità al semiasse.*

Dim. Part. I. La tangente DN incontri in S e B le tangenti QS, AB tirate all' ellisse dagli estremi dell' asse maggiore; sarà la ragione di QD a DA uguale a quella di QS a BA pe' triangoli simili QDS, ADB.

Ma la stessa ragione di QD a DA è anche uguale a
* 171. quella di QF ad FA*. Dunque sarà QS : AB :: QF : FA, e quindi $QS \times AB : AB^2 :: QF \times FA : FA^2$.
Ma i rettangoli di QS in AB, e di QF in FA sono
* 175 e 184 uguali fra loro*. Dunque sarà pure AB^2 uguale ad FA^2, ed AB uguale ad AF. Inoltre il rettangolo di LN in RN sta al quadrato di NM, come il quadrato di AB,
* 163. o della sua uguale AF, a quello di BM^2: e sta poi $AF^2 : BM^2 :: FP^2 : NM^2$. Dunque sarà $LNR : NM^2 :: FP^2 : NM^2$; e quindi LNR uguale ad FP^2. Ed aggiungendo ad essi di comune PR^2, sarà PN^2 uguale ad FR^2, e PN uguale ad FR.

Part. II. Le rette FR, ed RG sono respettivamente uguali alle PN, e PD; dunque sarà FR : RG :: PN : PD. Ma pe' triangoli simili PDN, CDI sta PN a
* 195 PD, come CI, o la sua uguale CA*, alla CD: ed è
* 134 CA : CD :: CF : CA*. Dunque starà benanche FR : RG :: CF : CA. C.B.D.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

fig. 30. §. 200. *Se agli estremi de' rami* FR, FK *conducansi le tangenti* RT, KT; *la retta, che unisce il fuoco* F *col concorso* T *di queste tangenti, divide per metà l'angolo* RFK *compreso da' medesimi rami.*

La dimostrazione di questo Teorema è la stessa di quella, che fu recata alla Prop. 23. della Parabola.

§. 201. *Coroll.* In questa curva si possono anche dedurre come si è fatto nella Parabola le verità seguenti. I. Cioè *se agli estremi di una corda condotta*

per un fuoco dell' ellisse si tirino a questa curva due tangenti, il concorso loro sarà allogato nella linea di sublimità. II. E ad una tal corda dovrà essere perpendicolare la retta, che unisce il detto fuoco col concorso delle medesime tangenti.

PROPOSIZIONE XXXI.

PROBLEMA.

§. 202. *In un dato piano descrivere con moto organico un' ellisse, di cui sien dati amendue i fuochi, e l' asse.*

Solut. Preso un filo flessibile uguale in lunghezza al dato asse, si fermino i suoi estremi a que' due fuochi; e poi si applichi al filo la punta di uno stiletto, che mantenendolo sempre teso d' accanto a quel piano ne giri intorno a que' due punti, ed insiem ne segni in esso piano un' ovale. Questa sarà l' ellisse addimandata, come può conoscersi per la Prop. 26.

§. 203. *Scol.* E volendo descrivere una tal' ellisse con assegnazion di punti, dovremo valerci della Prop. 29., come vedrassi nel trattato dell' Iperbole. Ma parmi conveniente all' unità del metodo, che in queste Istituzioni ho adottato, il rilevarne dalla sezione del cono un' ellisse, di cui sien dati gli assi conjugati, e ciò dal seguente Problema può raccorsi.

PROPOSIZIONE XXXII.

PROBLEMA.

fig. 56. §. 204. *Dato un cono retto, ricavarne un' ellisse, di cui l' eccentricità, e 'l semiasse maggiore sieno respettivamente uguali alle date rette* T *ed* S.

Soluz. Il taiangolo isoscele FBD sia uno di quelli che si traduca per l' asse del dato cono: e dal suo vertice B s' inclini sulla base DF di esso triangolo prodotta verso R la retta BR, la quale stia al lato BF del detto triangolo, come la retta S all' altra T. Di poi nella BR prendasi la BQ dupla della retta S: e cundottavi per Q la QP parallela alla BD, ed insin che incontri BF, si compia il parallelogrammo ABQP. *Io dico, che distendendo per la* PA *un piano perpendicolare al triangolo* FBD, *debba essere la sezione* AKP *l' ellisse addimandata.*

Dim. Dal punto medio della PA, e dall' altro N si alzino le perpendicolari GK, NM alla medesima PA, e si distendano insino alla curva APM. E poi dal punto K si applichi sulla retta PA l' altra KV uguale alla PG. Sarà il rettangolo di AN in NP all' altro di DN in NF in ragion composta di AN : ND, e di PN : NF. Ma la prima di queste due ragioni pe' triangoli simili DNA, DRB è uguale a questa di BR : RD. Ed è pure per la somiglianza de' triangoli PNF, BFR la ragione di PN : NF quanto l' altra di BR : RF. Dunque, componendo queste nuove ragioni in luogo delle già indicate, sarà ANP : DNF :: BR^2 : DRF,
* 22 cioè per essere DNF uguale ad NM^2 *, sarà ANP :
* 129. * 142. NM^2 :: BR^2 : DRE, ovvero* $AG^2 : GK^2$ :: BR^2 : DRF.

E convertendo quest' analogia avrem finalmente $AG^2 : GV^2 :: BR^2 : BF^2$, e quindi $AG : GV :: BR : BF :: S : T$ (*per construz.*). Ma la retta AG è uguale all' altra S : dunque sarà benanche GV uguale a T. E l' ellisse AKP sarà la richiesta.

§. 205. *Cor.* I. Da un qualunque cono retto può sempre in facil modo ricavarsi un ellisse, che abbia un' eccentricità data, ed un dato semiasse maggiore o minore; ovver che abbia dati amendue i suoi assi. Imperocchè un cerchio, che si descrive col centro B, e con un intervallo maggiore della BF, dee necessariamente segarne la retta DF, come l' è chiaro dagli Elementi. Onde non vi è il caso impossibile in un tal Problema.

§. 206. *Cor.* II. E se diansi di posizione e di lunghezza due diametri conjugati di un'ellisse, potrem pure da un qualunque cono retto rilevar questa curva; sol che si rinvengono per la Prop. decimaquarta i suoi assi conjugati, e poi si pratichi l' artificio del presente Problema.



CAP. V.

DELLE DIMENSIONI DELL' ELLISSE.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

§. 207. *L' ellisse sta al rettangolo de' suoi assi, come l' è un cerchio al quadrato di un suo diametro.*

fig. 57. *Dim.* L' asse maggiore AB dell' ellisse ADBF si divida in un numero qualunque di parti uguali, CH, HI, ec; e pe' punti delle divisioni si tirino le semiordinate HQ, IO, ec. nel semicerchio descrittovi sull'asse maggiore AB. Sarà il quadrato dell' ordinata QH nel detto semicircolo uguale al rettangolo AHB: e quindi siccome questo rettangolo sta al quadrato di
* 106. KH, come l' asse maggiore al suo parametro*, o come BA^2 a DF^2; così dovrà essere $QH^2 : KH^2 :: AB^2 : DF^2$, e con ciò QH : KH :: AB : DF. Or se da' punti Q, e K si abbassino le QR, e KL perpendicolari alla EC; i due rettangoli RQHC, LKHC, che sono iscritti nel semicircolo e nella semiellisse, saran fra loro come QH a KH. Dunqu' essi dovran benanche essere nella ragione dell' asse maggiore al minore. E, continuando a questo modo un tal discorso, potrà conchiudersi, che tutti i rettangoli iscritti nel semicircolo stiano a tutti i corrispondenti rettangoli iscritti nella semiellisse, come n' è l' asse
* *lem.* 1. maggiore al minore*. Per la qual cosa, se tanto quel-

li che questi suppongansi terminare nel semicircolo e nella semiellisse respettivamente, sarà pur vero, che stia il semicerchio AQB alla semiellisse AKB, e con ciò l'intero cerchio AEBG a tutta l'ellisse AKBF, come l' asse maggiore al minore, o come il quadrato dell' asse maggiore al rettangolo degli assi. E permutando, sarà il circolo al quadrato dell' asse maggiore, come l'ellisse al rettangolo degli assi. C.B.D.

§. 208. *Cor.* I. Il cerchio, che abbia per un suo diametro l' asse maggiore di un' ellisse, suol dirsi *circoscritto* a questa curva. Onde con tal nozione potrem ritrarne dal presente Teorema, che: *l' ellisse stia al cerchio, che le si circoscrive, come il rettangolo de' suoi assi conjugati al quadrato dell' asse maggiore, cioè come l' asse minore al maggiore.*

§. 209. *Cor.* II. E volendo valutar l' aja di un' ellisse potrà dirsi, *ch' ella pareggi il rettangolo de' suoi assi moltiplicato pe'l numero, che prossimamente esprime il rapporto di un circolo al quadrato circoscrittogli.* E qui vuol sapersi, che questo numero giusta le speculazioni Archimedee sia $^{11}/_{14}$ ad un dipresso (*).

§. 210. *Cor.* III. Essendo costante il rapporto di ciascun cerchio al quadrato circoscrittogli, *le aje di due qualunque ellissi saran proporzionali a' rettangoli de' loro assi conjugati.*

§. 211. *Cor.* IV. E se mai queste due ellissi sien *simili*: cioè s' elleno abbian gli assi maggiori proporzionali a' minori, *le aje di tali figure dovranno essere in duplicata ragione de' loro assi maggiori, o de' minori.*

(*) Veg. *la misura del Cerchio* in fine del Vol. II. di questo Corso.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

fig. 67. §. 212. *Se una semiellisse terminata dall'asse maggiore, e dal semiperimetro si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al detto asse; la sferoide, che vi si genera, sarà due terzi di quel cilindro, che ha per altezza il detto asse, e per base il cerchio descrittone dal semiasse minore.*

Dim. Poste le medesime cose della precedente dimostrazione, i cilindri, che vengonsi a generare da' rettangoli LHKC, RQHC, nel volgersi che fanno la semiellisse ADB, e 'l semicerchio AEB intorno all' asse AB, sono fra loro come i cerchi de' raggi KH, e QH, o come i quadrati delle rette KH, e QH; avendo que' solidi la CH per comune altezza. Dunque i medesimi cilindri saranno eziandio come i quadrati delle DF, ed AB, cioè dell' asse minore, e del maggiore della detta ellisse. E ciò sempre dimostrandosi, saranno pe' Lemmi I. e II. l' intera sferoide e la sfera nella ragion de' quadrati delle DF ed AB, o de' cerchi de' diametri DF ed AB, o come i cilindri, che han per base questi cerchi, e per comune altezza l' asse BA. Dunque permutando sarà la sferoide al cilindro, che tien per altezza l' asse maggiore AB, e per base il circolo del diametro DF, come la sfera al cilindro circoscrittole, cioè come 2 a 3. E perciò la detta sferoide sarà due terzi di quel cilindro. C.B.D.

§. 213. *Cor.* 1. Se una semiellisse terminata dall' asse minore e dal semiperimetro si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al detto asse; *la sferoide schiacciata,*

che in tal caso vi si genera, sarà anche due terzi di quel cilindro, che tien per altezza il detto asse minore, e per base il circolo descrittovi dal semiasse maggiore.

§. 214. *Cor.* 11. Sia ADBF un'ellisse, ed AEBG il cerchio circoscrittole: ed all'asse maggiore AB delle detta Ellisse si tiri ovunque la semiordinata MI, che ne incontri il cerchio in O. E poi si concepisca volgersi intorno ad AI tanto il trilineo ellittico AMI, che il circolare AOI. Sarà il segmento sferoidale generatovi dal trilineo ellittico al corrispondente segmento sferico, che vi si genera dal trilineo circolare, in duplicata ragione dell'asse minore al maggiore.

PROPOSIZIONE XXXV.

PROBLEMA.

§. 215. *Poste le medesime cose del Teorema precedente, determinare la superficie dell'anzidetta sferoide.*

I. L'asse Aa della data ellisse si distenda d'ambe le parti, sicchè tanto la OG, che l'altra OH sia terza proporzionale in ordine all'eccentricità OF, ed al semiasse maggiore OA della detta curva. Inoltre intendasi descritta l'altra semiellisse GNH, che abbia per asse maggiore la retta GH, e per semiasse minore la OE, che sia quanto la OB semiasse conjugato della data ellisse AMa. E finalmente da' punti A, ed a si elevino le perpendicolari AI, aK alla retta Aa: dico essere l'addimandata superficie *quarta proporzionale in ordine al raggio di un circolo, alla sua periferia, ed al quadrilineo ellittico* AIK*a*. fig. 58.

Dim. Ad un qualunque punto M del perimetro

della data ellisse AMa si tirino i due rami FM ed fM, la normale MS, e la semiordinata MP, la quale si distenda insino ad N. Saranno, come ne appare dalla costruzione, G ed H i punti di sublimità della
* d. 9. Parab. medesima ellisse*: e le perpendicolari Gg ed Hh elevate da' punti G, ed H alla GH disegneranno le linee di sublimità della stessa curva.

Ciò premesso, tanto Mg ad MF, che Mh ad Mf
* 199. sono nella costante ragione di OA ad OF*, o di OG ad OA: dunque il rettangolo gMh, o il suo uguale GPH starà al rettangolo di FM in Mf, come OG^2 ad OA^2. Or il medesimo rettangolo FMf sta ad MS^2,
* 197. come* OA^2 ad OE^2. Dunque per uguaglianza ordinata sarà GPH ad MS^2, come GO^2 ed OE^2, o come GPH a PN^2: e quindi sarà MS^2 uguale a PN^2, MS uguale a PN, ed il quadrilineo $AIKa$ sarà la scala delle normali della semiellisse ABa. Ma nel Lemma III si è dimostrato essere la superficie di uno di cotesti solidi alla scala $AIKa$ delle normali nella figura, che il genera, come la circonferenza di un cerchio al suo raggio. Dunque la detta superficie sarà quarta proporzionale in ordine al raggio di un cerchio, alla sua periferia, ed al quadrilineo ellittico $AIKa$. C. B. D.



DELLE SEZIONI CONICHE

LIBRO TERZO.

DELL' IPERBOLE.

CAP. I.

DE' DIAMETRI DELLE IPERBOLE OPPOSTE.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

§. 216. *Nell' Iperbole* ANa *il quadrato di una qualunque semiordinata* NM *sta al rettangolo* AMD *delle ascisse d' omendue i vertici* A, *e* D, *come il lato retto* AB *al trasverso* AD, *cioè come il parametro al diametro.* fig. 59.

Ed i quadrati di due semiordinate NM, *ed* nm *sono tra loro come i rettangoli* AMD, *ed* AmD *delle corrispondenti ascisse da entrambi i vertici.*

La dimostrazione di questo Teorema può leggersi

in quella della Prop. 1. dell'ellisse con riscontrarne la figura citata.

§. 217. *Def.* Si dice *centro* dell' iperbole A*N*a il punto medio C del lato trasverso AD di essa curva. E si dirà *surregolatrice* la parallela CF, che da un tal centro si conduce alla regolatrice DB della stessa curva.

§. 218. *Cor.* 1. Il quadrato di una qualunque semiordinata MN dell' iperbole AN*n* è duplo del trapezio AMPF, che ne aggiunge al triangolo ACF la MP perpendicolare ad AM. *Ved.* §. 108. Onde starà MN^2 ad mn^2, come il trapezio AMPF all' altro A*mp*F.

§. 219. *Scol.* 1. Non pur dalla genesi dell' iperbole, ma dalla seconda parte di questa Proposizione ben si comprende, che i rami curvilinei di cotesta curva debban divergere all' infinito non men tra loro, che dal diametro, che in mezzo ad essi producesi all' ingiù indefinitamente. Inoltre le anzidette ascisse non sono segmenti del diametro, quali erano nell' ellisse, ma ne sono i producimenti di esso.

§. 220. *Scol.* 11. Per la definizione della tangente dell' iperbole si adotti quella, che fu recata per la Parabola *Defin.* 1. *Lib. I.* Ed in essa curva si possono l' ascisse benanche computar dal centro nel semidiametro prodotto.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

§. 221. *Se dal centro dell' iperbole* ANQ *tolgasi* *fig.* 60.
nel semidiametro CA *la parte* CP *terza proporzionale dopo un' ascissa* CM *presovi dal centro, e 'l detto semidiametro; la retta che unisce l' estremo di quella parte troncata con un' estremo dell'ordinata corrispondente alla detta ascissa, sarà tangente di cotesta sezione.*

E l' angolo del contatto iperbolico non sarà divisibile per una retta.

La dimostrazione di questo Teorema può leggersi nella Prop. 2. dell' Ellisse con osservarne la fig. cit.

§. 222. *Cor.* I. Qui può anche rilevarsi, che stia PM : MA : MD : MC. E che debba essere PD : DM : PA : AM.

§. 223. *Cor.* II. E s' intenderà di leggieri qual artifizio di Geometria abbiasi a praticare per condurre la tangente all' iperbole ANQ, per un dato punto della detta curva, il quale non istiavi nel vertice. Che se in tal vertice ne abbisogni condurvi la tangente, basterà distendere per esso la parallela ad una sottoposta ordinata.

§. 224. *Cor.* III. Il diametro dell' iperbole prodotto insino ad un' ordinata n' è diviso armonicamente dalla curva, e dalla tangente condottale per un estremo di essa ordinata.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

fig. 60. §. 225. *Tutte le tangenti dell' iperbole ANQ concorrono col suo diametro AD sotto del centro C.*

fig. 61. *E se dal detto centro conducasi ad un punto N dell' iperbole ANQ la retta CN; questa retta dovrà cadere entro la sezione: nè potrà segarne altrove una tal curva, ma sì ben l' opposta sezione.*

fig. 60. *Dim. Part. I.* Nel primo Corollario del Teorema precedente si son dimostrati uguali i due rettangoli DMA, CMP. Dunque siccome il primo di essi n' è minore di CM^2 per la VI. El. II, così sarà anche l' altro CMP minore dello stesso CM^2: e quindi MP minore di CM, e 'l punto P del concorso della tangente NP e del diametro AD dovrà cadere sotto del centro di tal sezione.

fig. 61. *Part. II.* La retta CN non potendo esser tangente dell' iperbole ANQ per quel, che si è detto nella Parte I., dee cadere entro una tal curva. Nè poi può incontarla in un qualche punto Q. Imperciocchè, se ciò sia vero, s' intendan condotte pe' punti N e Q le semiordinate NM, QR al diametro AD dell' iperbole. Sarà NM : QR :: CM : CR pe' triangoli simili NMC, QRC: e quindi ancora $NM^2 : QR^2 :: CM^2 : CR^2$. Ma per la natura di questa curva l' è anche $NM^2 : QR^2 ::$ DMA : DRA. Dunque sarà eziandio $CM^2 : CR^2 ::$ DMA : DRA, e con ciò $CM^2 : CR^2 :: CM^2 - DMA : CR^2 - DRA :: CA^2 : CA^2$. Laonde sarebbe CM^2 uguale a CR^2, ch' è un assurdo.

Inoltre si tagli la retta C*m* uguale all'altra CM,

ed ordinata la *mn* al diametro AD, si congiunga la C*n*. E poichè la differenza de' quadrati delle CM e CA è quanto la differenza degli altri di C*m* e di CD, saran pure i rettangoli DMA, ed A*m*D, che disegnan quelle differenze, tra se uguali: e quindi anche i due quadrati di NM, e di *nm*, che son proporzionali ad essi rettangoli, dovran pareggiarsi: e sarà la retta NM uguale all' altra *nm*. Dunque i due triangoli NCM, *n*C*m* avendo le condizioni della 4 del I.° degli Elementi, dovranno avere gli angoli MCN, *m*C*n* tra se uguali. Onde dovrà starne la CN per dritto colla C*n*. E con ciò la segante CN, che conducesi dal centro dell' iperbole ad un punto del perimetro di essa curva, dovrà tagliarne l' opposta sezione nel prolungar quella retta all' insù del centro della curva. C. B. D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

§. 226. *Ogni retta, che si ritrovi entro lo spazio iperbolico parallela ad una tangente di una tal sezione, dee incontrarne in due punti il perimetro di essa curva.*

Dim. La dimostrazione di questo Teorema può ordirsi come quella della Parabola, Prop. 3. Lib. I.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

fig. 62. §. 227. *La retta* AB, *che passando per lo centro* C *delle iperboli opposte* AE, BQ, *si arresta nelle convessità loro, dee restarne divisa per metà nel detto centro.*

E le tangenti AS, BT, *che da' suoi estremi conduconsi ad esse curve, vi deggiono essere parallele.*

Dim. Taluno per convincersi di queste due verità potrà leggere la dimostrazione della Prop. 3. dell' Ellisse con riscontrarne la figura quassù citata.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

fig. 63. §. 228. *Se da un qualunque punto* C *del perimetro iperbolico* AQC *conducansi le due rette* CN, CB *respettivamente parallele alla tangente laterale* QS, *ed alla verticale* AP; *il triangolo* NCB, *ch' esse comprendono col diametro della sezione, sarà uguale al corrispondente quadrilineo* TBAP.

Dim. Veggasi la figura qui indicata, con leggerne la dimostrazione della Prop. 4. dell' Ellisse.

E per la definizione del *quadrilineo corrispondente* può adottarsi quella dell' ellisse §. 117.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

§. 229. *La segante* GL, *che passa per lo centro* G *dell' iperbole* AQC, *dee dividere per metà tutte le corde, che dentro ad essa ne giaccion parallele alla tangente* QS. fig. 63.

Onde la retta GL *sarà un altro diametro della sezione, il quale ha per sue ordinate le proposte corde.*

Dim. Qui si verificano que' medesimi casi, ch' io v' indicai nella Prop. 5. della Parabola: e vi si possono adattare le loro dimostrazioni, riscontrandovi la figura 64. per lo primo e pe 'l secondo caso, e l'altra 63. per lo terzo. E dovrà solamente avvertirsi, che i quadrilinei MGEK, TRDB, i quali nella Parabola erano parallelogrammi, nell' Iperbole sono trapezj. fig. 64. e 63.

§. 230. *Cor.* I. Nell' iperbole, oltre al lato trasverso assegnatole dalla sua genesi per sezione, si possono concepire infiniti altri diametri, che passan tutti per lo centro di tal curva.

§. 231. *Cor.* II. La retta, che unisce il centro dell' iperbole col punto medio d' una di lei corda, dee incontrar tal curva in quel punto, ove la tangente che le si conduce, n' è parallela alla detta corda. E ciò può dimostarsi colla guida del §. 124.

§. 232. *Cor.* III. Si descriva un cerchio, che abbia per centro il punto medio del lato trasverso, e per intervallo una retta maggiore della metà del detto lato: dipoi si tiri la corda per le sezioni d' una delle due iperboli opposte, e si unisca il detto centro colla metà di questa corda. La congiungente distesa d'ambe

le parti sarà l'asse dell'iperbole: per esserne perpendicolare ad essa corda, e quindi alle tangenti della curva pe' suoi estremi. Ed i due punti, ove l'asse incontra le iperboli opposte, si diranno i *vertici principali* di esse curve.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

fig. 65. §. 233. *Poste le medesime cose della Prop. prec., i quadrati delle semiordinate* DB, RF *sono fra loro come i rettangoli* lBL, lFL *delle ascisse d'amendue i vertici* l, *ed* L.

Dim. Qui si potrà dimostrare, come nell'ellisse, che sia il triangolo DBK uguale al trapezio SMBL, o che nell'opposta sezione il triangolo *dbk* sia uguale al suo corrispondente trapezio *smbl*. E collo stesso ragionamento potrà rilevarsi, che sia il triangolo RFO uguale al trapezio SNFL. Dunque dovrà essere DBK: RFO :: SMBL : SNFL. Ma i primi due termini di quest'analogia, cioè i triangoli simili DBK, RFO, sono come i quadrati de'loro lati omologhi DB, RF; ed i trapezj SMBL, SNFL, che ne sono i termini rima-
* 120. nenti, son proporzionali a'rettangoli lBL, lFL*. Dunque sarà $DB^2 : RF^2 :: lBL : lFL$.

Ed essendo per la medesima ragione il triangolo DBK all'altro *dbk*, come il trapezio SMBL al trapezio *smbl*, sarà pure $DB^2 : db^2 :: lBL : Lbl$; essendo la prima di queste due ragioni uguale a quella de'triangoli, e l'altra uguale alla ragion de' trapezj. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

§. 234. *Se da un punto* M *di un qualunque diametro* QP *dell' iperbole* QNP *si elevi la retta* MP *terza proporzionale dopo l' ascissa* QM, *e la semiordinata* MN, *le quali rette corrispondano a quel punto ; l' estremo* T *di detta perpendicolare sarà allogata in una retta data di posizione , che dicesi* r e g o l a t r i c e *della proposta curva.* fig. 8.

La dimostrazione di questo Teorema può leggersi in quella della Prop. 7. dell' ellisse , adattandone la figura quassù citata (*a*).

§. 235. *Defin.* 11. La retta QA elevata dal punto Q perpendicolare al diametro QP dell'iperbole QN*n*, e distesa insino alla regolatrice PA , dicesi *parametro* di esso diametro.

(*) Nella Parabola il quadrato di una semiordinata ad un qualunque diametro è uguale al rettangolo della corrispondente ascissa nel parametro. Nell'ellisse quel quadrato è minore di questo rettangolo ; e nell' iperbole n' è poi maggiore. E per tal ragione coteste tre curve furon dette in greco idioma παραβολή, ἔλλειψις, ὑπερβολή che nella nostra lingua significano *equalità*, *difetto*, ed *eccesso*. Ed in ciò anche si avvera , che i primitivi nomi imposti alle cose abbian significato certe da loro qualità preclare.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

fig. 8. §. 236. *Nell' iperbole il quadrato della semiordinata* NM *ad un qualunque diametro* PQ *sta al rettangolo* QMP *delle ascisse d' amendue i vertici, come n'è il detto diametro* PQ *al suo parametro* QA.

La dimostrazione di questo Teorema può leggersi nella Prop. 8. dell' ellisse, con adattarvi l' indicata figura.

§. 237. *Scol.* Cotesta proprietà assenziale dell' iperbole, che nel primo di questi Teoremi erasi dimostrata per lo lato trasverso di essa curva, qui vedesi convenir del pari ad ogni altro diametro dell' iperbole. Onde tutto quello, che in conseguenza di un tal principio n'è stato fin qui dedotto, potrà convenevolmente per ogni altro diametro aver luogo.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

fig. 60. §. 238. *Ogni diametro* AD *dell'iperbole* ANQ *qualor ne incontri una di lei tangente* NP, *e l' ordinata* MN *per lo contatto, dee restar diviso armonicamente dalla curva, e dalla detta ordinata.*

La dimostrazione di questo Teor. è identica a quella della Prop. 9. dell' ellisse; ond' ella quivi potrà leggersi col riscontro dell' indicata figura.

§. 239. *Scol.* Per le definizioni della *sottangente*, e della *sunnormale* dell' iperbole si leggano quelle rapportate ne' §§. 55, 56.

§. 240. *Cor.* Allorchè un semidiametro dell' iperbole, il quale sia segato da una di lei tangente, protraggasi insino all' ordinata per lo contatto, *vi deggion essere continuamente proporzionali l' ascissa dal centro, il detto semidiametro, e quell' ascissa diminuita della sottangente.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

§. 241. *Nell' iperbole la sunnormale* MH *sta all' ascissa* MC *dal centro, come* AO *parametro dell asse* AD *al detto asse.* fig. 60.

Dim. Si legga la dimostrazione della Prop. 15. Lib. II., e si riscontri la figura qui citata. E 'l parametro dell asse si chiami *parametro principale.*

§. 242. *Cor.* I. All' asse DA dell' iperbole ANQ si elevi dal vertice A la perpendicolare AO uguale al parametro del detto asse, e vi si tiri la regolatrice DO, e la surregolatrice CF, sarà MH : MC :: AO : AD :: MS : MC, pe' triangoli simili ADO, MSC. Onde dovrà essere MH uguale ad MS.

§. 243. *Cor.* II. Dunque in generale: *le Surregolatrici relative agli assi delle Curve Coniche ne sono i luoghi delle loro sunnormali.*

§. 244. *Defin.* III. Se dal centro C dell' iperbole GAK conducasi la CP parallela ad una di lei tangente e media proporzionale tra 'l semidiametro CA, che' passa per lo contatto, e 'l semiparametro di esso, una fig. 66.

tal retta si dirà *semidiametro secondario* di CA. E la CA si direbbe *semidiametro primario* rispetto alla CP.

§. 245. *Cor.* I. Si distenda il semidiametro AC verso *a*, sicchè C*a* adegui CA; e similmente si prolunghi l'altro semidiametro PC in E, finchè sia CE uguale a CP: l'intera A*a* si dirà diametro *primario*, *o principale* rispetto a PE; e questo, *diametro secondario* di A*a*.

§. 246. *Cor.* II. Ed essendo il rettangolo *a*FA al quadrato di GF, come il diametro A*a* al suo parametro, o come il semidiametro AC alla metà del detto parametro, sarà anche il rettangolo AF*a* al quadrato di GF, come il quadrato del semidiametro primario AC a quello del suo secondario CP.



CAP. II.

Degli assintoti delle Iperboli.

§. 247. *Def.* iv. Una retta diccsi *assintoto* di una curva, se protraendo all' infinito coteste due linee, che sieno convergenti tra loro, l' una non può mai incontrar l' altra, ma può sì bene accostarlesi per un intervallo minore di qualunque dato.

§. 248. *Cor.* i. Dunque la convergenza assintotica di due linee dee racchiudere i seguenti caratteri. L' impossibilità di convenire l' una di queste due linee coll' altra, per quanto si protraggano insieme verso quella parte, ove convengono. E 'l possibile di loro avvicinamento per un intervallo minore di qualunque dato.

§. 249. *Cor.* ii. E quindi due rette, che sieno parallele, non possono essere tutte e due assintoti di una medesima curva loro sottoposta. Imperciocchè, se quella di tali rette, che sia più vicina alla curva, suppongasi esserle un assintoto; l' altra non potrà mai appressarsi alla curva per un intervallo minore della distanza di esse parallele. Onde non avrà il secondo carattere dell' assintotico convergimento. E se la più rimota dalla curva sia l' assintoto di essa; l' altra, che l' è più d' accosto, dovrà incontrarla.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

fig. 66. §. 150. *Se in una qualunque tangente* DB *dell' iperbole* GAK *si prendano di quà, e di là dal contatto le parti* AD, AB *respettivamente uguali al semidiametro secondario di quello, che passa per lo medesimo contatto; le rette* CD, CB, *che si conducono dal centro dell' iperbole agli estremi* D *e* B *di quelle parti, saranno gli assintoti della proposta iperbole* GAK, *e della sua opposta gak.*

Dim. Per un punto qualunque K del perimetro iperbolico GAK si tiri l'ordinata KG al diametro Aa, ed essa poi si distenda insino alle rette CD, CB. Sarà per la natura di questa curva il quadrato di GF al rettangolo AFa, come AB² ad AC², o come FH² ad FC², pe' triangoli simili CAB, CFH. E quindi per la 19. El. V. sarà il rettangolo HGL ad AC², come AB² ad AC²: onde dovrà essere il detto rettangolo HGL uguale al quadrato di AB. Ma per quanto sia grande la GL base del rettangolo HGL, il quale dee pareggiare il quadrato di AB, non può mai svanirne la GH altezza di esso. Dunque non potrà la retta CH incontrare il ramo iperbolico AG in alcun punto.

Inoltre la ω sia una retticciuola di una qualunque picciolissima grandezza; e poi tra l'assintoto CL dell' iperbole GAK, e 'l semidiametro CAF di essa curva si applichi parallela ad AD la FL terza proporzionale dopo la retticciuola ω, e la DA. Sarà chiaro dover essere FL : AD :: AD : ω. E per essersi dimostrato nel §. precedente, che il rettangolo LGH pareggi AD²,

sarà pure LG : AD :: AD : HG. Ma la prima ragione di quest' analogia è maggiore della prima della precedente, cioè sta LG ad AD in maggior ragione di FL ad AD. Dunque sarà benanche la ragione di AD ad HG maggiore di quella di AD ad ω: e quindi HG minore di ω. Per la qual cosa la retta CH dee essere assintoto del ramo iperbolico AG. E così pure si dimostrerà, che sia l' altra CL assintoto dell' altro ramo AK: e che amendue le rette CH, CL distese all'insù diventino assintoti dell' iperbole opposta *gak*. C.B.D.

§. 251. *Cor.* I. Niuna parallela alla CH può essere un assintoto del ramo iperbolico AG*. E nemmeno può concepirsi, che una retta divergente, o convergente colla CH siane assintoto del detto ramo curvilineo. E lo stesso dicasi dell' altro ramo AK, e di que' due dell' opposta sezione. * 249.

§. 252. *Cor.* II. Dunque le due iperboli opposte GAK, *gak* non possono avere altri assintoti, che le sole retta *bH*, e *dL*.

§. 253. *Scol.* Essendosi dimostrato in questo Teorema essere assintoto di un ramo iperbolico la retta che unisce il centro di tal curva coll' estremo di una di lei tangente fattasi uguale al semidiametro secondario di quello, che passa per lo contatto; ognuno potrebbe da ciò incautamente inferirne essere infiniti di numero gli assintoti di una stessa iperbole. Ma essi non son che due, cioè quelli, che abbiam quassù stabiliti; poichè gli estremi della infinite tangenti nel detto modo condizionate debbonsi allogare in que' due soli assintoti, come abbondevolmente sarà chiarito nel seguente Teorema, ch' è converso del già proposto.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

fig. 67. §. 254. *Se ad un qualunque punto* A *dell' iperbole* SAR *rinchiusa tra i suoi assintoti* CL, CN *le si conduca la tangente* BAO; *ciascuna sua parte, che resta tra il contatto, e quell' assintoto che ne incontra, sarà uguale al semidiametro secondario di quello, che passa per lo contatto.*

Dim. Se AB non sia uguale al semidiametro secondario di CA, si tagli A*b* uguale ad esso semidiametro secondario, e si unisca la C*b*. Dovrà esser questa retta assintoto del ramo iperbolico AS. Dunque il ramo AS avrà per assintoti le rette CB, e C*b*. Lo che ripugna. C.B.D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

fig. 67. §. 255. *Se per un punto* S *di un' iperbole si tiri una segante, che ne incontri gli assintoti di essa; il rettangolo di quelle sue parti, che restano fra la curva, ed i detti assintoti, sarà uguale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa segante.*

Dim. Cas. 1. Qui può verificarsi, che la segante LSN incontri in due punti l' iperbole SAR. E può anche addivenire, che un' altra segante condotta per S incontri le due sezioni opposte. Nel primo caso la corda SR si divida per metà nel punto *a*. Si unisca

cotesto punto col centro C dell' iperbole per la retta Ca: ed una tal congiungente si distenda insino all' iperbole Pqo; sarà qA quel diametro di essa curva, al quale la corda SR n'è un'ordinata*. Ed oltre a ciò la tangente condotta alla medesima curva per lo punto A dovrà esser parallela alla SR, ed uguale al semidiametro secondario di CA*. Onde potrà dimostrarsi come nella Prop. 13., che sia il rettangolo LSN uguale al quadrato di BA, o del semidiametro secondario di CA. * 231. * 254.

Cas. 2. La retta SQ incontri in S, e P le sezioni opposte SAR, Pqo. E dal centro C di esse curve si meni la CA parallela alla SP, e poi per S si distenda la retta LSN parallela alla BA tangente dell' iperbole SAR in A. Ciò posto, per lo parallelismo delle rette MS ed AC, e delle altre LS e BA, i triangoli LMS e BCA sono simili: onde dovrà stare LS : SM :: BA : AC. Ma per le stesse ragioni il triangolo NSQ è simile all'altro AOC. Dunque sarà SN ad SQ, come AO, o la sua uguale BA ad AC. E quindi il rettangolo LSN starà al rettangolo QSM*, come BA^2 ad AC^2. Ma il primo rettangolo è uguale a BA^2. dunque sarà eziandio QSM uguale ad AC^2. C.B.D. * 23.VI.

256. *Cor.* 1. Nella stessa guisa può dimostrarsi il rettangolo MPQ uguale al quadrato di CA, e con ciò al rettangolo QSM. Dunque, dividendo la QM ugualmente in F, sarà $FP^2—FQ^2$ uguale ad $SF^2—FM^2$. E quindi FP uguale ad SF, e QP uguale ad MS.

§. 257. *Cor.* 11. Laonde, *se per un punto qualunque del perimetro iperbolico conducasi una segante, che incontri in due punti la stessa iperbole, o le opposte sezioni, ed essa poi si distenda insino agli assintoti; le sue parti che restano fra la curva, e gli assintoti saranno sempre tra se uguali.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

fig. 66. §. 258. *L' angolo assintotico* BCD *è retto*, *ottuso*, *o acuto*, *secondochè l' asse a*A *dell' iperbole sia uguale*, *minore*, *ò maggiore del suo secondario* PE.

Dim. Suppongasi il semiasse principale CA uguale al semiasse secondario CE, o alla tangente verticale AB; sarà isoscele il triangolo rettangolo BAC: dunque l' angolo ACB sarà semiretto. E dimostrando esser benanchè semiretto l' altro ACD; l' è forza, che sia retto l' intero angolo assintotico BCD composto da' due semiretti ACB, ACD.

Che se CA sia minore di CE, o di AB, l'angolo CBA sarà minore dell' altro ACB. Ma tutti e due deggion fare un retto; perciocchè il triangolo CAB è rettangolo in A. Dunque l' angolo ACB sarà piucchè un semiretto; e quindi il suo doppio BCD sarà maggiore di un retto, cioè ottuso.

Finalmente qualor si ponga CA maggiore di CE o di AB, con simile ragionamento si dedurrà, che sia l' angolo ACB minore di un semiretto, e che quindi BCD suo duplo debba esser minore di un retto, e con ciò acuto. C. B. D.

§. 259. *Cor. La retta*, *che unisce un de' vertici principali delle iperboli col loro centro*, *divide per metà l' angolo assintotico.*

§. 260. *Def.* v. L' iperbole, il cui asse principale adegua il suo secondario, dicesi *equilatera*, o *parilatera*: ed ella si direbbe *scalena*, se i medesimi assi sien disuguali.

§. 261. *Def*. VI. Gli assintoti diconsi *ortogonali*, *o rettangoli*, se comprendano un angolo retto.

§. 262. *Cor*. Dunque, se un' iperbole è parilatera i suoi assintoti saranno ortogonali, e viceversa.

§. 263. *Def*. VII. Se dal vertice principale di un' iperbole vi si conduca la parallela ad un assintoto, la quale poi si distenda insino all' altro; il quadrato di una tal retta si dirà *la potenza dell' iperbole rapportata a' suoi assintoti*: *ed essa retta ne sarà il suo lato*.

Così il quadrato della AE, che dal vertice principale A dell' iperbole AF*f* conducesi parallela all' assintoto CD, è la potenza dell' iperbole AF, ed AE il suo lato. *fig.* 68.

§. 264. *Cor*. Per lo punto A si tiri AH parallela a CE; la figura AECH, che ne risulta, sarà un rombo: per esserne l'angolo ACE uguale all'altro ACH*. E tanto sarà il quadrato di AE, che il rettangolo di AE in EC. * 259.

§. 265. *Def*. VIII. Se da un qualunque punto P dell' iperbole AF*f* si meni la FB parallela all'assintoto CD, che tagli in B l' altro assintoto CB, essa retta si dirà *ordinata dell' iperbole tra gli assintoti*, e CB *la sua ascissa corrispondente*.

§. 266. *Def*. IX. Se l' assintoto CL dell' iperbole RAS ne incontri una di lei tangente BO, la parte BK del detto assintoto, la quale resta fra la tangente, e l' ordinata AK condottagli dal contatto, si dirà *Sottangente* dell' Iperbole rapportata a' suoi assintoti. *fig.* 67.

§. 267. *Cor*. 1. Essendo BA uguale ad AO, sarà BK uguale a KC. Dunque *nell' iperbole tra gli assinto-*

ti la Sottangente è uguale all' ascissa, che l' è sottoposta.

§. 268. *Cor.* II. E se per lo punto B dell' assintoto CB dell' iperbole RAS voglia condursi la tangente a questa curva, vi potremo impiegare il seguente facilissimo artifizio. Si divida in parti uguali la BC in K, e per K si ordini alla detta curva la KA; e si unisca la BA. Questa retta sarà la tangente richiesta.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

§. 269. *Il rettangolo formato da un' ordinata dell' iperbole tra gli assintoti nella corrispondente ascissa è sempre uguale alla potenza dell' istessa iperbole.*

fig. 68. *Dim.* Sia FB una qualunque ordinata all' iperbole AF tra gli assintoti CD, CG: il vertice principale della medesima curva sia il punto A, e per F ed A si distenda una retta insino a' detti assintoti; sarà il
* 255. rettangolo DAG uguale all' altro DFG*; e quindi sarà DA : DF :: FG : AG. Ma per lo parallelismo delle tre rette DC, AE, FB sta DA : DF :: CE : CB; e per la similitudine de' triangoli FBC, AEG l' è pure FG : AG :: FB : AE. Dunque sarà CE : CB :: FB : AE: e con ciò il rettangolo di FB in BC sarà uguale al rettangolo di AE in EC, cioè a dire alla potenza del-
* 264. la detta iperbole*. C.B.D.

§. 270. *Cor.* I. E conducendo in questa istessa iperbole l' altra ordinata *fb*, si mostrerà in simil guisa essere il rettangolo *fb*C uguale alla potenza della detta iperbole. Dunque i due rettangoli di FB in BC

e di *fb* in *b*C saranno uguali; e starà FB : *fb* :: *b*C : BC.

§. 271. *Cor.* II. Cioè a dire *le ordinate nell'iperbole tra gli assintoti sono inversamente come le loro ascisse.*

§. 272. *Cor.* III. E saran pure uguali i parallelogrammi FBCI, *fbCi*, come quelli che reciprocano i lati intorno agli angoli uguali FBC, *fbC*. E con ciò i triangoli FBC, *fbC* metà di essi parallelogrammi saran benanche tra se uguali.



CAP. III.

De' Diametri conjugati delle Iperboli.

PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA.

fig. 69. § 273. *Dato il cono retto* BTSL, *ricavarne dalla sezione di esso un' Iperbole, di cui a p sia l' asse principale, e qp il secondario.*

Quì si esige, che la ragione del semidiametro TK *della base del cono non istia all' altezza* KB *di tal solido in minor ragione dell' asse secondario q p al primario ap.*

Sol. I dati assi *ap*, *qp* dispongansi ad angolo retto, come quì veggonsi delineati, e vi si congiunga l' ipoteousa *aq*. Inoltre il triangolo isoscele TBL sia una di quelle sezioni, che si traducano per l'asse del dato cono. E presa nel lato BT di esso triangolo la BD uguale a quell' ipotenusa *aq*, e distesavi la DF parallela alla TL, s' inclini dal punto B la retta BR uguale ad *ap*. Lo che può sempre farsi per l'indicata condizione. Imperocchè se la ragione di TK a KB, o di DC a CB supponghasi uguale a quella di *qp* ad *ap*, i due triangoli DCB, *qpa* essendo simili, ed avendo uguali le loro ipotenuse BD, *aq*, dovranno avere benanche uguali i cateti BC, *ap*. E se TK stia a KB, o DC a CB in maggior ragione di *qp* ad *ap*, sarà anche $DC^2 : BC^2$

in maggior ragione di $qp^2 : ap^2$. E componendo dovrà
essere DB^2 a CB^2 in maggior ragione di aq^2 ad ap^2.
E sarà finalmente CB^2 minore di ap^2, e CB minore di
ap. Onde potrà applicarvisi una retta BR uguale ad
ap. Ciò premesso, dal punto R si tiri la RP paralle-
la alla BD, e dalle due rette BR, ed RP si compia
il parallelogrammo BRPA. Io dico, che *distendendo
per la* PA *un piano perpendicolare al triangolo* TBL,
l' Iperbole MPO, *che vi si genera, debba esser la ri-
chiesta.*

Pel punto medio della PA, ch' è l' asse (*) della
detta sezione, intendasi disteso l' asse secondario EG:
e per N vi si ordini la NM. Sarà il rettangolo ANP
all' altro DNF in ragion composta di AN : ND, e di
PN : NF. Ma la prima di queste due ragioni pe' trian-
goli simili DNA, DAB è uguale a quella di BR : RD.
Ed è pure per la somiglianza de' triangoli PNF, BRF
la ragione di PN : NF quanto l' altra di BR : RF.
Dunque componendo queste nuove ragioni in luogo
delle già indicate, sarà ANP : DNF :: BR^2 : DRF; cioè
$ANP^2 : NM^2 :: AP^2$: DRF. Ma la prima di queste due * 22.
ultime ragioni è uguale a quella di $AP^2 : EG^2$. Ed è * 246.
poi DRF uguale a qp^2. Imperciocchè il rettangolo DRF
per lo lemma IV si è dimostrato uguale a $DB^2—BR^2$, e
si sa poi per la 47. El. I. esser pq^2 uguale ad $aq^2—ap^2$.
Dunque avendo fatto per construzione BD uguale ad
aq, e BR ad ap, sarà benanche DRF uguale a qp^2.
Onde starà $AP^2 : EG^2 :: AP^2 : qp^2$: e quindi EG^2 sa-

(*) Quando il cono è retto, il diametro di ciascuna curva coni-
ca, che si rileva dalla sezione di esso, è l'asse di tal curva, come
l'è chiaro per l'El. XI. E 'l triangolo per l'asse è sempre isoscele.

rà uguale a qp^2. E l' Iperbole OPM avrà per asse principale la retta op, e per secondario la qp.

§. 274. *Def.* x. Due iperboli diconsi *conjugate tra loro*, se il semiasse principale di una di esse sia il secondario dell' altra (*).

fig. 66. Così se all' iperbole AK, di cui CA sia il semiasse principale e CE il secondario, si opponga l' altra iperbole E*e*, che abbia CE per semiasse principale e CA pe 'l suo secondario; coteste due iperboli saranno tra se conjugate.

§. 275. *Cor.* I. Le due iperboli conjugate AK, ed E*e* hanno un comune centro, cioè il punto C. E la diagonale CD del rettangolo CADE, che si compie dal semiasse principale e dal secondario di una delle dette iperboli, sarà un comune assintoto di queste curve.

§. 276. *Cor.* II. Ed apponendo alle già dette iperboli le loro opposte *gak*, *r*P*p*, si avranno in tal modo le quattro iperboli GAK, *q*E*e*, *gak*, *p*P*r*, di cui ciascuna è conjugata ad ognun altra di quelle due, che le sono accanto. E tutte quattro han pure il comune centro C, e gli stessi assintoti D*d*, B*b*.

§. 277. *Cor.* III. Le due iperboli conjugate GAK, *q*E*e* contengono una stessa potenza. Imperocchè essendo DA uguale ad AB, e DE uguale ad E*b*, la congiunta AE dee esser parallela alla B*b*. E le AI, ed EI lati delle potenze delle dette iperboli saranno uguali per lo parallelogrammo ADEC.

§. 278. *Scol.* Le quattro iperboli conjugate rivolgono al comun centro loro le convessità: e ciascuno

(*) Il problema precedente autorizza la possibilità del definito.

degli otto rami di queste curve, che si è detto estendersi all' infinito, è assintotico a quell' altro, che gli è d' accosto. Ma non è così dell' ellisse, tutto che ella sia una curva affine all' iperbole. Imperciocchè le parti del perimetro ellittico riguardano colle concavità di esse il centro della figura: esse vi formano una curva continua: e questa poi ritorna in se stessa, ed acquistasi la forma di un' ovale.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

§. 279. *Sieno* GAK, *gak due iperboli opposte; io dico, che gli estremi de' loro diametri secondarj debbansi allogare nelle iperboli conjugate* Ee, *Pp.* fig. 66.

Dim. Da un qualunque punto D di CD comune assintoto delle iperboli conjugate AK, Ee si tirino alle stesse curve le tangenti DAB, DE*b*, che si protraggano insino all' altro assintoto B*b*. Si conduca la retta AE fra' contatti, e le altre due CA, e CE. Sarà la retta EA parallela all' assintoto CB, per esser DA uguale ad AB, e DE uguale ad E*b*. Ed oltre a ciò ella * 254.
sarà divisa ugualmente in I dall' altro assintoto CD (*): dunque siccome DA è uguale ad AB, così DI dovrà pareggiare la IC. E quindi i triangoli AID, CIE avendo i lati AI, ed ID rispettivamente uguali agli altri EI, ed IC, e l' angolo AID uguale a CIE, dovran

---

(*) Il rettangolo di EI in IC è uguale all' altro di AI in IC, per essere ciascuno di essi uguale alla potenza di queste iperboli: onde AI è uguale ad IE.

benanche avere uguali le loro basi AD, e CE, non men che gli angoli ABI, ECI. Il perchè la retta CE, che si è mostrata uguale alla tangente AD, e che l'è ancor parallela, a cagione degli angoli uguali ADC, DCE, dovrà essere il semidiametro secondario di CA. Ma il suo estremo E tocca l'iperbole conjugata Ee: dunque sarà vero quel che si è proposto. C.B.D.

§. 280. *Cor.* La retta, che unisce gli estremi d'un semidiametro, e del secondario di esso, è parallela all'assintoto, che le si oppone.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

fig. 70. §. 281. *Sia* AD *un qualunque diametro delle iperboli opposte* DT, FA, *cui si tiri ovunque la parallela* TF, *che le incontri in* T, *ed* F; *io dico, che il suo diametro secondario* BE *debba dividerla in due parti uguali.*

E se cotesta parallela seghi una delle iperboli conjugate QVP; *la parte* QP, *ch'è dentro di tal curva sarà puranche divisa per metà dallo stesso diametro secondario.*

Dim. Part. I. Si tiri al diametro AD non meno l'ordinata TK, che l'altra FG: queste rette saranno parallele fra loro, e la figura GKTF dovrà essere un parallelogrammo: onde ne saranno i lati opposti TK, * 246. FG uguali fra di loro. Ed essendo i rettangoli AKD, DGA come i quadrati di TK, e di FG*; siccome questi sono tra se uguali, così il dovranno essere anche quelli. Laonde aggiungendo a' medesimi rettangoli AKD, DGA gli uguali quadrati di CD, e di CA, ne risulte-

rà il quadrato di CK uguale all altro di CG, e CK uguale a CG. Or a queste rette CK, e CG sono uguali le HT, ed HF respettivamente, come lati opposti de' due parallelogrammi CKTH, CGFH: dunque HT sarà uguale ad HF.

Part. II. Sieno impertanto Cq, e Cp gli assintoti delle iperboli opposte DT, AF, che saranno eziandio assintoti della conjugata PEQ*. Sarà tanto la Tq uguale alla Fp, che Qq a Pp*: e quindi anche la TQ dovrà pareggiare la FP. Laonde, se queste rette si tolgano respettivamente dalle uguali HT, HF, ne avanzerà HQ uguale ad HP. C.B.D. * 275. * 257.

§. 282. *Def.* XI. Due diametri si dicono *conjugati fra loro*, se ciascuno di essi sia parallelo alle ordinate dell' altro.

§. 283. *Cor.* I. Ogni diametro primario dell'iperbole, e 'l suo secondario sono conjugati fra loro.

§. 284. *Cor.* II. Dunque gli estremi de' diametri conjugati a quelli, che nelle iperboli opposte si conducono, debbono toccare le iperboli conjugate.

§. 285. *Cor.* III. E quindi DN parametro del diametro DA potrà definirsi, che sia una terza proporzionale in ordine al detto diametro, ed al conjugato di esso.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

fig. 70. §. 286. *Poste le medesime cose della prima parte della precedente proposizione, il quadrato di* TH *semiordinata al diametro secondario* BE *sta alla somma de' quadrati di* CH *ascissa dal centro e di* CE *semidiametro secondario, come il quadrato del semidiametro primario* CD *a quello del detto secondario* CE.

Dim. Il rettangolo AKD sta al quadrato di KT,
* 256. come il quadrato di CD a quello di CE². Dunque sarà la somma del rettangolo AKD e del quadrato di CD, cioè il quadrato di CK, alla somma de' quadrati di KT e di CE, come CD² a CE². Vale a dire dovrà esser $TH^2 : CH^2 + CE^2 :: CD^2 : CE^2$. C. B. D.

§. 287. *Cor.* I. E conducendovi un' altra semiordinata *th* al medesimo diametro BE di essa curva, si dimostrerà nello stesso modo esser $th^2 : Ch^2 + CE^2 :: CD^2 : CE^2$.

§. 288. *Cor.* II. Onde potrà conchiudersi, *che i quadrati delle semiordinate ad un diametro secondario dell' iperbole sien proporzionali a' quadrati delle loro ascisse dal centro accresciuti del quadrato del semidiametro secondario.*

§. 289. *Cor.* III. E quindi sarà $TH^2 : DC^2 :: CH^2 + CE^2 : CE^2$.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

§. 290. *Il parallelogrammo* HQME, *che si compie da' due semidiametri conjugati* HQ, HE *delle iperboli* AQ, BE, *è uguale al rettangolo de' semiassi conjugati* HA, HB. fig. 71.

Dim. Essendo la retta QM uguale, e parallela ad HE semidiametro conjugato di QH, il punto M dovrà trovarsi in HM assintoto comune delle due iperboli conjugate AQ, BE*. E così pure si mostrerà esser l'altro punto L nel medesimo assintoto HM. Or poichè le rette QE, AB, che uniscono gli estremi di que' due semidiametri conjugati e de' semiassi, son parallele all'altro assintoto HC*, il triangolo HQF sarà uguale all'altro HAT. Dunque prendendo i loro quadrupli, ne risulterà il parallelogrammo HQME, che compiesi da' semidiametri conjugati HQ, HE, uguale al rettangolo HALB de' semiassi conjugati. C. B. D.

* 254. e 279.

* 280.

§. 291. *Cor.* I. E da ciò può inferirsi, che ogni parallelogrammo iscritto in tutti e quattro i rami iperbolici sia di una costante grandezza, cioè quanto il rettangolo degli assi conjugati.

§. 292. *Cor.* II. Se pe' punti Q, e B si distendano le YX e BZ rispettivamente parallele alle rette AL ed EM, e si congiunga la QB; sarà il parallelogrammo HYXB uguale all'altro HQZV: imperocchè il primo è duplo del triangolo HQB, con cui n'è sulla stessa base HB, e tra le medesime parallele HB, YX. E 'l secondo dello stesso triangolo è anche

duplo per esserne amendue sulla medesima base HQ e fra le stesse parallele HQ, BZ.

§. 293. *Cor.* III. Dunque starà il parallelogrammo HYXB all'altro HALB, come il parallelogrammo HQZV all'altro HQME. Cioè HY : HA :: HV : HE. Ma sta HV : HE :: HB : HR :: HS : HB. Dunque sarà HY : HA :: HS : HB.

§. 294. *Cor.* IV. Ed essendo HA : HB :: HY : HS, ed $HA^2 : HB^2 :: HY^2 : HS^2$; sarà eziandio HA^2 :
* 19. V. $HB^2 :: aYA : bSB^2$. Ma l'è poi $HA^2 : HB^2 :: aYA : YQ^2$. Sicchè sarà $aYA : bSB :: aYA : YQ^2$, e sarà bSB uguale a YQ^2. E così può anche rilevarsi, che il quadrato di SE adegui il rettangolo aYA.

§. 295. *Cor.* V. Dunque: *se dagli estremi di due semidiametri conjugati di un' iperbole conducansi due semiordinate agli assi della curva; questi saran da quelle divisi proporzionalmente. E 'l rettangolo di cotesti due segmenti in ciascun asse dovrà pareggiare il quadrato di quella delle semiordinate, che al medesimo asse n' è parallela.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

fig. 72. §. 296. *Nelle iperboli* AG, DF *i quadrati de' due diametri conjugati* GF, PM *tanto differiscono fra loro, quanto i quadrati degli assi* DA, KQ.

Dim. Il quadrato della retta CB, il quale, *per la 6. Elem. II.*, è uguale al quadrato di CA ed al rettangolo DBA, dee ugnagliare i quadrati di CA, e di
* 295. MN.* Dunque il quadrato dell' ipotenusa CG, che pa-

reggia i quadrati de' cateti CB, BG, sarà uguale ai tre quadrati di CA, di MN, e di BG.

In simil guisa può dimostrarsi, che il quadrato di CM adegui i tre quadrati di CQ, di GB, e di MN. Laonde la differenza de' quadrati di CG, e di CM sarà quanto i tre quadrati di CA, di MN, e di BG differiscono da' tre quadrati di CQ, di GB, e di MN, cioè a dire quanto il solo quadrato di CA differisce da quello di CQ: imperocchè la somma di MN^2 e BC^2 è quanto quella di BC^2 ed MN^2. E quindi, quadruplicando i termini, sarà la differenza de' quadrati de' diametri conjugati uguale alla differenza de' quadrati degli assi. C. B. D.

§. 297. *Cor.* I. Dunque se un iperbole abbia due diametri conjugati tra se uguali, dovrà avere tutti gli altri diametri rispettivameute uguali ai loro coujugati.

§. 298. *Cor.* II. E quiudi tutti *i diametri dell' iperbole parilatera sono rispettivamente uguali a' loro conjugati*. E sarau pure i medesimi diametri rispettivamente uguali ai loro parametri. E 'l quadrato di ciascuna semiordinata ad uu di questi diametri sarà uguale al rettangolo delle ascisse da entrambi i vertici.

§. 299. *Cor.* III. E 'l quadrato di una qualunque semiordinata ad un diametro secondario di questa iperbole sarà poi uguale alla somma de' quadrati del semidiametro secondario, e dell' ascissa dal centro*. * 286.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA.

fig. 71. §. 300. *Dati di grandezza e di posizione i due semidiametri conjugati* HQ *ed* EQ *dell' iperbole* AQ, *determinarne i semiassi conjugati.*

Constr. Si compia il parallelogrammo HQME dalle date rette QH, HE, e vi si conducano le diagonali HM, QE. Inoltre dal punto H si meni la HK parallela alla diagonale QE, e media proporzionale tra la metà delle anzidette diagonali. E divisi per metà gli angoli KHL ed LHe per le rette HA ed AB, si tiri dal punto K la parallela alla diagonale HM: e poi per lo punto A, ove quella ne incontra la retta HA, si distenda la AB parallela alla KH. *Saranno* HA, *ed* HB *i semiassi addimandati.*

Dim. Essendo le rette HQ, HE due semidiametri conjugati della richiesta iperbole, la diagonale HM del
* 279 parallelogrammo HEMQ, che compiesi da essi, sarà un
dim. assintoto di tal curva*; e l' altro ne sarà la retta HK condotta dal punto H parallela all' altra diagonale EQ. Ed oltre a ciò i semiassi conjugati della detta iperbole dovran ritrovarsi nelle rette HY, ed HS, che divi-
* 259. dono per metà gli angoli KHL ed eHL*. Ma essendo la HK media proporzionale tra le HF ed FQ, ella dee
* 269. esserne il lato della potenza della richiesta iperbole*: e la retta KA, che da K conducesi parallela ad HF, dee segnare nella retta HY il vertice principale A della detta iperbole. Dunque sarà HA il semiasse principale di tal curva. E tirando per A la AB parallela ad HK, ne sarà HB il semiasse conjugato. C. B. D.

§. 301. *Cor.* I. Dati due semidiametri conjugati di un'iperbole, si potrà descriver cotesta curva colla guida di questo Problema, e di quello della Prop. 18.

§. 302. *Cor.* II. E potrà benanche descriversi un' iperbole, che abbia per assintoti i lati HC, HL del dato angolo CHL, e passi per un dato punto Q entro di esso. Cioè: » Dal punto Q si meni la QF parallela » alla HC, e fatta la FM uguale alla FH, si uniscano le rette MQ, QH, e si compia il parallelogram» mo HQME. Saranno le HQ, ed HE due semidia» metri conjugati dell' iperbole richiesta, i cui semias» si potran rinvenirsi per la Prop. precedente; ed ella » si potrà poi descrivere per la Prop. 18.

§. 303. *Scol.* Il presente Problema, che vedesi ridotto a ritrovar due rette, tal che sia data la differenza de' quadrati loro, e 'l rettangolo di essa, può risolversi agevolmente per le analitiche vie, o per le geometriche. Ma n'è piaciuto volerlo qui risolvere per le proprietà note degli assintoti dell' iperbole.

CAP. IV.

DELLE TANGENTI, E DELLE SEGANTI DELL' IPERBOLE.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

§. 304. *Per un dato punto fuori l'iperbole condurre una tangente ad essa curva.*

Cas. I. Se il punto dato stia in uno de' due assintoti delle proposte iperboli, s'intenderà pel §. 268. qual artifizio debba impiegarsi a tal uopo, ed a quale delle dette curve debba cadere la tangente, che vi si domanda.

fig. 73. *Cas.* II. Se il dato punto R stia dentro l'angolo assintotico CHP, col seguente artifizio si otterrà l'intento. Si tiri la retta HR dal centro H della data iperbole al dato punto R: ed ella poi si distenda all'ingiù, sinchè la HN sia terza proporzionale dopo le HR, ed HA. E condotta per N nella detta iperbole la corda Mm parallela alla tangente di essa curva in A, si uniscano le due rette RM, Rm. *Queste saranno le tangenti addimandate.* E la dimostrazione potrà ordirsi, come quella dell' Ellisse, Prop. 16.

fig. 74. *Cas.* III. Finalmente nel doversi condurre la tangente all' iperbole MA dal punto T, che sia fuori l' angolo assintotico KCH, dovrà praticarsi il seguente artifizio. Si tiri la retta TCO per lo centro C dell' iperbole AM, e per lo dato punto T. E dallo stesso centro conducasi la CA al punto medio di una corda di detta curva, parallela alla TC: ed in A poi si meni la tangente Aq all' iperbole AM, producendola in-

sino al di lei assintoto CH. Inoltre presa la CO terza proporzionale dopo le CT ed Aq. si meni per O la OM parallela alla CA, che incontri in M ed m le iperboli opposte, e si uniscano le rette TM, e Tm. Dico esser *queste le tangenti*, *che si rischieggono*.

Dim. Imperocchè, se mai la retta Mt diversa dalla MT potesse toccare in M l'iperbole MA, ordinata la MN al diametro DA, sarebbe AQ² a CA², così MN² a DNA, o CNr². Ma il quadrato di MN sta al rettangolo CNr nella ragion composta di quelle di MN a CN, e di MN ad Nr, o della sua uguale di Ct a Cr, per esser simili i due triangoli MNr, Ctr. Dunque sarà AQ² : CA² :: OCt : NCR; e quindi siccome n'è CA² uguale ad NCr, per la tangente Mt; così dovrebb'essere OCt uguale ad AQ². Ma per construzione è AQ² uguale ad OCT. Dunqne sarauno tra se uguali i rettangoli OCt, OCT, ch'è un assurdo. E così potrebbesi benanche dimostrare, che la Tm sia tangente dell'iperbole Dm opposta alla primiera curva. * 222.

§. 305. *Cor* 1. Ciascuna tangente dell'Iperbole ne tronca da'due semidiametri conjugati e verso il centro della figura due parti, cho hanno i seguenti simmetrici valori. La prima di esse, qual sarebbe la CR, è terza proporzionale in ordine all'ascissa corrispondente all'ordinata per lo contatto, ed al semidiametro primario, cioè in ordine alle CN, e CA, come si è dimostrato nel §. 240. E l'altra CT è *anche terza proporzionale dopo la semiordinata* NM *per lo contatto e 'l semidiametro secondario* CB.

§. 306. *Cor.* II. Se diasi un punto fuori di un'iperbole, potrà dai casi quassù rapportati rilevarsi, se due tangenti possan condursi da quel punto alla detta curva, o una sola: e quando niuna tangente potrà pervenirle da quel punto.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Fig. 75. §. 307. *Se da un punto preso fuori di un' iperbole cadano sulla medesima curva, o sulle opposte sezioni due tangenti; queste saranno nella ragion de' semidiametri conjugati a quelli, che passano pe' loro contatti.*

Dim. Cas. I. Dal punto Q cadano sulla stessa iperbole AM le due tangenti QA, QM, e da' punti A, ed M si tirino le semiordinate AF, MN a' diametri, che passano pe' contatti M, A. Dovrà esser CR : * 240. CA :: CA : CN², e CO : CM :: CM: CF. Ma distendendo le dette tangenti insino a' semidiametri conjugati di CA e di CM, n'è poi, per lo parallelismo delle rette MR ed AF, CR : CA :: CM : CF :: CO : CM. Dunque le due rette CN, e CF saran similmente divise ne' punti R ed A, ed O ed M. E per tal divisione dovrà essere RA² : NRC :: OM² : FOC.

Ciò premesso, per la similitudine de'triangoli RAQ, RNM sta AQ : MN :: RA : RN; e per la somiglianza degli altri due RAQ, CRT sta pure AQ : CT :: RA : RC. Dunque componendo queste ragioni sarà il quadrato di AQ al rettangolo di NM in CT, o al quadrato di BC, che gli è uguale, come AR² ad NRC. E dimostrando io simil modo esserne QM² : CG² :: FM² : FOC; sarà AQ² : CB² :: QM² : CG², cioè AQ: CB :: QM : CG. E permutando QA : QM :: CB : CG.

Cas. II. Sieno SM, e SD le tangenti condotte da S nelle iperboli opposte AM, D*d*; sarà chiaro dover esser le due rette SM, e DN similmente divise ne' punti T, R, e Q, ed in questi altri C, R, ed A.

Dunque sarà SM : MQ :: DN : NA. Ma si è dianzi dimostrato, che stia DN ad NA, come DR ad RA², o come DS ad AQ. Dunque sarà SM : MQ :: DS : AQ; e permutando SM ad SD, come MQ ad AQ, o come CG a CB. C.B.D. * 232.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

§. 308. *Se dagli estremi* A, *e* D *di un qualunque diametro* AD *dell' iperbole* MA *si tirino ad essa curva le tangenti* AQ, DS, *che avunque ne incantrino una di lei tangente laterale* MS; *il rettangolo delle tangenti verticali* DS, AQ *sarà uguale al quadrato di* CB *semidiametro conjugato ad* AD. fig. 78.

Dim. Dal contatto M si tirino a' semidiametri conjugati CA, CB le semiordinate MN, MO, e si distenda la CB insino alla tangente laterale SQ. E poichè CA² adegua NCR², togliendo da queste grandezze uguali il quadrato di CR, vi rimarrà il rettangolo DRA uguale all' altro CRN; e quindi sarà RD : RC :: RN : RA. Ma sta RD : RC :: DS : CT, pe' triangoli simili RDS, RCT. Ed è poi RN : RA :: NM : AQ, per la similitudine degli altri triangoli RNM, RAQ. Dunque sarà DS : CT :: NM : AQ, e 'l rettangolo di DS in AQ dovrà essere uguale al rettangolo di NM in CT, cioè al quadrato di CB. C.B.D. * 240.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA.

fig. 75. §. 309. *Poste le medesime cose della Propos. preced. il rettangolo* SMQ *delle parti della tangente laterale, che restano fra il contatto, e le tangenti verticali, adegua il quadrato del semidiametro* CG *parallelo ad essa tangente laterale.*

Ed allo stesso quadrato di CG *l' è pure uguale il rettangolo* TMR *delle parti della tangente laterale, che sono tra il contatto e gl' incontri de' detti semidiametri conjugati.*

Leggasi la dimostrazione della Prop. 22. dell'Ellisse, con osservarne la figura indicata.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA

fig. 72. §. 310. *Se le due corde* QA, FH *dell' iperbole* QHF *s' incontrino entro di tal curva, o fuori di essa; i rettangoli* FKH, QKA *de' loro segmenti saran come i quadrati de' diametri paralleli ad esse corde.*

Dim. Per intender la verità proposta in questo teorema potrà leggersi la dimostrazione della Proposizione 17. dell' ellisse, con osservarne la figura dianzi citata, e con avvertire, che quì dal triangolo DSR debbansi togliere il triangolo PSH, e'l trapezio NSRZ, che furon dimostrati nel §. 228. tra se uguali.

§. 311. *Cor.* 1. Di quì potrà dimostrarsi come

nell' ellisse, ed in convenevol modo, che, *se da un medesimo punto cadano in un' iperbole una tangente, ed una segante, il rettangolo dell' intera segante nella sua parte esterna, e 'l quadrato della tangente sieno come i quadrati de' diametri, che son paralleli ad esse rette.*

§. 312. *Cor. 11. E se una corda di un'iperbole ne interseghi due ordinate di un qualunque diametro di essa, i rettangoli de' segmenti di queste ordinate saranno proporzionali a' rettangoli de' corrispondenti segmenti di quella corda.*

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

§. 313. *Se da un punto* A *conducansi all' iperbole* GNE *de due tangenti* AB, AC, *ed una qualunque segante* ADE; *cotesta segante sarà divisa armonicamente da una tal curva, e dalla retta fra' contatti.* fig. 24.

Le dimostrazioni di questo teorema, e de' due seguenti sono identiche a quelle delle Prop. 16, 17, e 18 della Parabola.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA.

§. 314. *Se dal punto* R *cadano sull' iperbole* BFAT *le due tangenti* RF, RG, *e le due seganti* RB, RT; *tirata la retta* FG *fra contatti, e le oltre due* AV, BT *per le sezioni superiori, e per le inferiori rispettivamen-* fig. 25.

te ; queste tre rette saran fra loro parallele , o dovran concorrere ad uno stesso punto.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

fig. 26. §. 315. *Se da un qualunque punto* K *preso dentro l'iperbole* ABS *si distenda , come ne piaccia , la corda* AS , *e pe' suoi estremi conducansi le tangenti* AV , *ed* SV *ad una tal curva ; il concorso di dette tangenti dovrà allogarsi in una retta data di posizione.*

Dim. Si legga la Prop. 18 della Parab., e quello, che si è aggiunto nell' Ellisse , Prop. 20.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

fig. 79. §. 316. *Una sezione conica non può segare in più di quattro punti un' altra curva conica , o un cerchio .*

Dim. S' è possibile la curva conica ABCE sia segata ne' cinque punti A , B , C , D , E da un' altra curva conica AQBHC , o da un cerchio. Si uniscano i due punti A e B, e gli altri due C e D per le rette AB , CE , che prodotte s' incontrino in F. E poi si dividano le AB, e DC ne' punti O, ed V, sicchè stia AF : FB :: AO : OB , e DF : FC :: DV : VC, e si unisca la retta OV , la quale seghi in L ed M la

curva ALBMD. Sarà chiaro (*) dover essere di lei tangenti le due rette, che dal punto F a' punti L ed M si conducono. E lo stesso può dimostrarsi per l'altra curva AQBHC; essendo il punto F, come l'è chiaro, fuori dell'una curva, e dall'altra. Ciò posto si unisca il punto F coll'altro punto E per la retta FE. Sarà EF : ER :: FH : HR, e così pure EF : ER :: FK : KR. Dunque sarà FH : HR :: FK : KR, e componendo FR : HR :: FR : KR, e sarà poi HR uguale a KR, ch'è un assurdo.

Che se le rette AB, DC sieno parallele, la retta OV, che facciasi passare pe' punti medj di coteste corde, sarà un diametro sì della curva ALBC, che dell'altra AQBC. Dunque conducendo per lo punto E la retta EH parallela a ciascuna delle anzidette corde AB, DC, sarà la retta ER uguale ad RH, e la stessa ER uguale RK. Lo che n'è anche un assurdo. C. B. D.

(*) Ciò si comprende dall'essere in una stessa retta i divisati contatti, ed i punti O, ed V. *Prop.* 30.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

fig. 80 §. 317. *Descrivere una sezione conica, che passi pe' cinque punti A, B, C, D, E, dati di posizione, tre de' quali, comunque presi, non istieno per dritto.*

ANALISI GEOMETRICA,

Si uniscano i punti A e C, e gli altri due B e D per le rette AC, BD, e dall'altro punto E si conducano le rette EF, EG rispettivamente parallele alle congiunte AC, BD. Saran proporzionali i rettangoli de'loro segmenti, cioè a dire sarà BND : BMD :: ANC : EMF*. Ma in quest'analogia son dati i primi tre rettangoli, e n'è anche data la EM base del quarto: dunque dovrà esservi data la sua altezza MF (*). Quindi è, che sarà dato il punto medio O dell' intera FE: e con ciò sarà data di posizione la retta OV, che passa pe' punti medj O, ed V delle due parallele EF, AC date di posizione, e di grandezza. In simil modo si raccoglie doverne esser data di posizione la KH, che passa pe' punti medj H e K delle altre due parallele BD, GE date ancor esse di sito, e di grandezza. Dunque sarà dato di posizione il punto L, ove s' intersegano le VO, ed HK. E questo dovrà es-

*61, 166. e 311.

(*) Facendo i rettangoli BND, BMD, ANC rispettivamente uguali agli altri PNx, EMz, EMy, l'indicata proporzione si riduce a quest'altra fra linee rette, cioè Mx : Mz :: Ny : MF. Onde per gli Elementi piani sarà data la MF.

serne in tal caso il centro dell' ellisse, supposto che il punto L stia in mezzo al quadrilineo MEPN. E per ritrovare due semidiametri conjugati di tal curva dovrà istituirsi la seguente analogia. Facciasi $CV^2 : FO^2 :: RL^2 - LV^2 : RL^2 - LO^2$; sarà dividendo $CV^2 - FO^2 : FO^2 :: LO^2 - LV^2 : RL^2 - LO^2$. Ma in questa proporzione son dati i primi tre termini: dunque sarà dato il quarto, cioè $RL^2 - LO^2$. Ed in tal modo saprassi RL^2, per esser dato LO^2, e quindi anche la RL. E se poi si tiri la LS parallela ad OF, e di tal lunghezza, che stia $LS^2 : RL^2 :: FO^2$ (*) $: RL^2 - LO^2$, sarà dato il primo termine di quest'altra analogia per esserne dati i rimananti. E così avrassi la retta LS. Ed essendo date di posizione, e di grandezza le rette LR, ed LS, che son due semidiametri conjugati dell' ellisse da descriversi, saran dati i semiassi conjugati di cotesta curva, che potrà poi esibirsi convenevolmente.

Che se le rette GE, KI, che passano pe' punti medj delle parallele AB, CO, e delle altre due DF, CQ, sieu parallele fra loro; la curva da descriversi sarà una parabola, di cui eccone l' asse, e 'l suo parametro. fig. 81.

Si è detto nel I°. Libro esser la differenza de' quadrati di AE, e di OG uguale al rettangolo di GE nel parametro del diametro HE. Dunque per esser dati que' due quadrati e la GE base di questo rettangolo, si saprà la sua altezza ch' è quel para-

---

(*) La grandezza $RL^2 - LO^2$ può farsi uguale ad un quadrato, per gli Elem. piani, quale si dica a^2; sarà $LS^2 : RL^2 :: FO^2 : a^2$, cioè $LS : RL :: FO : a$.

metro. Inoltre potrà anche sapersi il vertice H del diametro HE, per esservi AE^2 uguale al rettangolo del detto parametro nella EH. E così pure si potrà determinare il vertice L, e 'l parametro del diametro LI. Quindi è, che se prendansi nelle HG ed LK le HV ed LZ rispettivamente uguali alle quarte parti de' detti parametri, e per V e Z si tirino le VP, e ZP parallele alle AB, CQ (*); queste segneranno colla loro intersezione il fuoco P: e la PR parallela ad HE sarà l' asse, di cui si troverà il vertice, ed il parametro cogli artifizj di già praticati. Onde si potrà descriver tal curva con moto organico, con assegnazion di punti, ed anche per la sezione di un cono retto nel seguente agevol modo. Nel triangolo FBD per l' asse di

fig. 69. un qualunque cono retto facciasi FD a DB, come quel dato parametro principale, ch' io chiamo V, alla DN. Di poi per N si tiri la NP parallela alla DB, e per la NP si distenda un piano perpendicolare a quello del triangolo FBD. Questa curva sarà la richiesta. Imperocchè sta V : DN :: FD : DB :: NF : NP. Dunque sarà $V \times PN$ uguale ad FND, o ad NM^2. E quindi la parabola PM dovrà avere la retta V per suo parametro principale.

Inoltre converrà l' analisi quassù recata adattarla all' iperbole, se la posizione de' punti dati ci faccia conoscer chiaramente non potersi per es-

fig. 27. (*) Prendendo nella RS la RC uguale alla quarta parte del parametro di RS nella parabola LAR, e conducendo per C un' ordinata al diametro RS, la CD dee passare per lo fuoco F di tal curva. Poichè, se la detta ordinata incontri l' asse nell' altro punto f, sarà Mf uguale ad RC, cioè alla RF, o alla sua uguale MF, ch' è un assurdo.

si condurre una parabola, o un'ellisse, o se rinvengasi RL^2 minore di LO^2, o il valore di RL^2 negativo (*). *fig.* 81.

(*) Si ea dalla Prop 31. *Lib. II.*, e dalla 18. *Lib. III.* come si possano per la sezione del cono retto rilevare l'ellisse, e l'iperbole. E di bene in tal congiuntura mostrarne la loro descrizione per assegnazione de' punti. Ed in primo luogo volendo descrivere un'ellisse, che abbia per semiassi conjugati le rette AC, e CE, basterà descrivere il cerchio ABD col centro C, intervallo CA, che n'è il semiasse maggiore; e poi in ciascuna semiordinata NM nel cerchio ABD converrà prendere NP ad NM, come CE a CA. Il punto P sarà nel perimetro ellittico. Imperocchè da una tal proporzione dee risultare $NP^2 . NM^2 :: CE^2 \; CA^2$, cioè $NP^2 : AND :: CE^2 : CA^2$ (*Coroll. II. Prop.* 10 *lib. II.*). *fig.* 82.

Ma per l'iperbole, descritto il cerchio ABD col centro C intervallo CB semiasse principale della richiesta iperbole, si meni la tangente NB ad esso cerchio da un qualunque punto N del semiasse CA prodotto all'ingiù. Inoltre si unisca la CB, e presa la CK uguale al semiasse CE conjugato ad AC, si conduca per K la KH parallela a BN, e per N si elevi la NP perpendicolare a CN, ed uguale ad HK. Il punto P starà nell'iperbole richiesta. Poichè essendo $HK^2 : NB^2 :: CK^2 : CB^2$, sarà pure $NP^2 : CN^2 - CA^2 :: CE^2 : CB^2$. E quindi la curva AP dovrà essere un iperbole. *fig.* 83.

Finalmente, perchè ogni semiordinata ad un diametro della parabola è media proporzionale tra la sua ascissa, e'l parametro, in facil modo ne sarà determinata la sua lunghezza, pel cui estremo dee passar la detta curva.

CAP. V.

De' Fuochi delle Iperboli.

§ 318. *Def.* XIII. *Il fuoco di un' iperbole* è quel punto nell' asse principale, ove l'ordinata, che gli si conduce, è quanto il parametro del detto asse.

§. 319. *Def.* XIV. *L' eccentricità di coteste iperboli* è la distanza del loro centro da ciascun de'detti fuochi.

§. 320. *Scol.* Ho stimato di ometter le definizioni de' *punti di sublimità delle iperboli*, *delle linee di sublimità*, *e de' rami*, potendo valer quelle, ch' io vi recai nella Parabola Cap. II.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA.

fig. 84. §. 321. *La retta* AP, *che unisce gli estremi de' semiassi conjugati* CA, CP *dell' iperbole* AM, *è uguale alla* CF *eccentricità di essa curva: lo che conduce ad agevolmente ritrovare i fuochi delle iperboli.*

Ed è poi cotesta eccentricità media proporzionale tra 'l semiasse principale, e tra la somma di tal retta e del semiparametro di esso.

Dim. Part. I. Qui può dimostrarsi come nell'Ellisse, che il rettangolo BFA sia uguale al quadrato di CP. Dunque aggiungendovi di comune il quadrato di CA, dovrà risultarne il quadrato di CF uguale a quello di

AP, e quindi CF uguale ad AP. Laonde, se col centro C intervallo AP descrivasi un cerchio, questo dovrà segnare negli assi prolungati delle due iperboli opposte, e delle due conjugate i loro fuochi.

Par. II. Si prenda nel semiasse CB la CO uguale alla metà del parametro principale AT, e poi si unisca la PO. Sarà CA : CP :: CP : CO* ; e quindi i * 244. due triangoli ACP, OCP, dovranno avere per la 6. El. VI. l' angolo APC uguale all' altro POC. Dunque aggiungendo ad essi di comune l' angolo CPO dovrà esser tutto l' angolo APO uguale a' due angoli POC, CPO, cioè ad un retto. E sarà quindi CA ad AP o alla sua uguale CF, come CF ad AO. C.B.D.

§. 322. *Corol.* I. *Nell' iperbole il quadrato del semiasse conjugato è uguale alla differenza de' quadrati dell' eccentricità, e del semiasse principale.*

§. 323. *Corol.* II. Ad un qualunque punto M dell' iperbole RM, di cui SR sia l'asse principale, RQ il suo parametro, e CT il semiasse conjugato, conducasi la normale MO, la tangente MP, e l' ordinata MN al detto asse. Sarà RQ ad RS, o CT^2 a CR^2, come NO ad NC*. E componendo dovrà esser CF^2 : * 241. CR^2* :: CO : CN :: OCP : NCP. Onde sarà CF^2 ugua- * 322. le ad OCP, come l' è CR^2 uguale ad NCP, per lo Coroll. prop. II.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

fig. 85. §. 324. *Se da' fuochi* F *ed* V *delle iperboli opposte* RM, Sm *conducansi le due rette* FM, VM *ad un punto* M *di una di esse curve; questi due rami dovranno inclinarsi ugualmente alla tangente della detta iperbole in* M: *cioè a dire l'angolo* FMP *sarà uguale all' altro* VMP.

Dim. Qui può dimostrarsi, come nell'ellisse Prop. 24, che stia VO : OF :: VP : FP. Ma pe lo parallelismo delle rette OM ed Ff sta VO : OF :: VM: Mf:: GM : ML. Dunque starà GM : ML :: VP : FP :: VG: FL pe' triangoli simili VPG, FPL. E permutando dovrà stare GM : VG :: ML : FL. Onde per la 6. El. VI. sarà l'angolo FMP uguale all' altro VMP. C. B. D.

§. 325. *Corol.* I. Per lo fuoco V dell'iperbole Sm si meni la retta VE parallela al ramo FM. Sarà cotesta retta uguale all'altro ramo VM. Poichè gli angoli VEM VME del triangolo MVE sono uguali fra loro, per esser ciascuno di essi uguale al medesimo angolo PMF*.

* 324. e 29. I.

§. 326. *Cor.* II. E distendendo per lo centro C delle dette iperboli la retta GCo parallela al ramo FM, e quindi ad VE, sarà EG uguale a GM. Perciocchè dalla 2. El. VI. rilevasi esserne EG : GM :: Vo : oM :: VC : CF. Laonde, se congiungasi la VG, i due triangoli VGE, VGM avendo i lati rispettivamente uguali, avranno gli angoli VGE, VGM tra se uguali: e ciascuno di essi dovrà esser retto.

§. 327. *Cor.* III. Dunque anche qui raccolgonsi

le medesime verità proposte per l'Ellisse ne' §§. 189., 190.: cioè *se da un fuoco di un' iperbole si meni la perpendicolare ad una di lei tangente, e poi si unisca il centro della figura col punto di una tal insidenza; cotesta retta dovrà esser parallela al ramo tirato al contatto dall' altro fuoco.*

§. 328. *Corol.* IV. E viceversa, *se dal centro dell' iperbole conducasi la parallela al ramo, che passa per lo contatto, e poi si unisca l' altro fuoco col concorso della parallela e della tangente; cotesta congiungente dovrà esserne perpendicolare alla tangente suddetta.*

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

§. 329. *Poste le medesime cose del Teorema precedente, il rettangolo de' detti rami* VM *ed* MF *è uguale al quadrato del semidiametro* CB *conjugato a quello, che passa per lo punto* M *della curva, ov'essi si uniscono.* fig. 86.

Leggasi la dimostrazione della Prop. 25. dell' Ellisse, e si osservi la figura quassù indicata.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

330. *Poste le medesime cose delle due Proposizioni precedenti, la differenza de' rami* VM *ed* FM *è uguale all' asse principale* AS. fig. 86.

Dim. Dal ramo maggiore VM tolgasi la parte MO uguale al minore MF. Sarà il rettangolo VMO

uguale al rettangolo VMF, e quindi al quadrato di
* p prec. CB semidiametro conjugato di CM*. E perciò i due quadrati di VM e di MO, che per la 7. El. II. son
* 7 II. uguali al doppio rettangolo VMO col quadrato di VO*, saranno uguali a $2BC^2$ con VO^2. Ma quegli stessi
* l. 4. quadrati sono uguali a $2CF^2$ con $2CM^2$*. Dunque sarà $2CB^2$ con VO^2 uguale a $2CF^2$ con $2CM^2$: e prendendo le metà loro dovrà esserne CB^2 con $1/2$ VO^2 uguale a CF^2 con CM^2.

Ciò posto, suppongasi il semiasse principale SC maggiore del suo conjugato CT, e quindi CM maggiore di CB; e poi d' ambe le parti del precedente pareggiamento tolgasi CB^2. Dovrà rimanervi $1/2$ VO^2 uguale a CF^2 colla differenza de' quadrati de' semidiametri conjugati CM e CB, o de' quadrati de' semiassi
* 296. conjugati CS e CT^2*. Ma CF^2 n' esprime la somma di questi medesimi quadrati: ed è poi noto, che la somma di due grandezze colla differenza loro debba costituirne il doppio della maggiore (*). Dunque sarà $1/2$ VO^2 uguale a $2CS^2$, e con ciò VO^2 uguale a $4CS$, ed VO uguale a 2CS.

Che se il semiasse principale CS sia minore del suo conjugato CT, e con ciò anche CM minore di CB, si dovrà togliere CM^2 da quelle somme, che si son mostrate qui sopra uguali. Onde dovrà restarne CF^2 uguale ad $1/2$ VO^2 colla differenza de' quadrati de' semidiametri conjugati CB e CM, o con quella de' quadrati de' semiassi conjugati CT e CS. Cioè a dire la somma de' quadrati di questi semiassi espressa da CF^2 sarà uguale alla loro differenza e ad $1/2$ VO^2. Dunque sarà $1/2$ VO^2 uguale a $2CS^2$, ed VO^2 uguale a $4CS^2$. Donde rilevasi come

---

fig. 87. (*) Le due rette disuguali AD e DB giacciano per dritto; e pre-

prima esserne la VO, differenza de' rami VM ed MF, uguale all' asse principale AS. C. B. D.

§. 331. *Corol.* I. Per quel, che si è detto nel Corol. II. prop. 36., essendo EV : Go :: MV : Mo :: FV : VC, sarà EV, o sia MV dupla di Go. E per la simiglianza de' triangoli FVM : CVo sta FM : Co :: FV : VC; dunque sarà FM dupla di Co. E quindi la differenza de' due rami MV ed MF, cioè l' asse principale SR, sarà duplo di CG. fig. 85.

§. 332. *Corol.* II. Vale a dire *se dal centro di un' iperbole si tiri la parallela ad un ramo, distendendola insino alla tangente condotta alla curva dall' estremo di esso; cotesta parallela sarà sempre uguale al semiasse principale. E dovrà anche cadere in quel punto, che segna nella medesima tangente la perpendicolare abbassatale dall' altro fuoco.*

§. 333. *Coroll.* III. E *se dal centro di un' iperbole si tiri la parallela ad una di lei tangente, ed ella poi si distenda, finchè ne incontri i rami menati al contatto; le parti di questi rami, che la detta parallela ne tronca verso il contatto, saranno rispettivamente uguali al semiasse maggiore.*

§. 334. *Corol.* IV. I due lati FM ed MO del triangolo FOM son rispettivamente paralleli a' lati CG e

---

sa la metà dell' intera AB vi si tolga AE uguale a DB. Sarà AC la semisomma delle proposte rette AD e DB; e CD ne sarà la semidifferenza: poichè AD supera DB o la sua uguale AE per ED. E si vedrà poi esser la maggiore di esse rette, cioè AD uguale alla semisomma colla semidifferenza loro, e la minore quanto la semisomma meno la semidifferenza; cioè AD = AC + CD, e DB ovvero AE = AC — CE. E la semisomma BC sarà uguale alla semidifferenza CD ed alla minore DB. E tutte queste illazioni son anche vere pe' doppj di tali grandezze.

GV del triangolo CVG, e le loro basi FO ed VC son per dritto: dunqu' essi saranno equiangoli. Onde dovrà stare FM : FO :: CG : CV. Cioè *ciascun ramo sarà alla parte dell' asse principale, ch' è tra'l detto ramo e la normale, come il semiasse all'eccentricità.*

fig. 85. §. 335. *Scol.* Due piccoli perni sien fitti nel piano VMF in V ed F, ed intorno al primo di essi sia vertibile la riga VK nel detto piano. Inoltre il filo flessibile FMK, la lui lunghezza sia minora di quella della riga VK, stia legato con un estremo nel perno F, e coll' altro all' estremo K della detta riga. E poi nell' aggirarsi la riga d' intorno al perno F, uno stiletto muovasi rasente la stessa riga, mantenendovi sempre teso il detto filo. Sarà chiarò doversi descrivere dallo stiletto un' iperbole, di cui l' eccentricità è quanto $\frac{1}{2}$ VF, e l' asse principale SR quanto la differenza di due qualunque rette MV, ed MF, inclinate da' que' perni ad un punto di questa curva, è sempre uguale ad VM + MK — (FM + MK), cioè ad SR (*).

(*) Si leggano le Sezioni Coniche del Signor la Hire per rinvenirvi le diverse specie di compassi ellittici, ed iperbolici.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

§. 336. *Se ad un qualunque punto* M *dell' iperbole* BM *conducasi il ramo* FM, *e la normale* MN, *e dal punto* N, *ove la normale ne incontra l'asse, si abbassi la* NE *perpendicolare al detto ramo; la parte* ME, *che da questo quella ne tronca verso la curva, sorà uguale al semiparametro principale.* fig. 88.

Vedi la dimostrazione della Prop. 27. dell'ellisse, riscontrando la fig. cit.

§. 337. *Corol. Il rettangolo fatto dalla normale* MN *nella* CG, *che dal centro dell'iperbole si cala perpendicolare sulla tangente* MS, *è di uno costante grandezzo, cioè uguale al quadrato del semiasse conjugato.*

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

§. 338. *Descrivere una sezione conica, che abbia il punto* F *per fuoco, la retta* Q *per parametro principale, e tocchi in* M *la data retta* AM (*) fig. 89.

ANALISI GEOMETRICA

Congiungasi la retta FM, e poi nella FM tolgasi

(*) Cotesta Proposizione serve ad isnodare il Problema inverso delle forze centrali nella vera ipotesi della gravità decrescente come il quadrato della distanza.

la ME uguale ad $1/4$ Q: e da' punti E ed M si elevino le rette EN, ed MN rispettivamente perpendicolari alle MF, ed MA: ed al punto N, ove quelle si uniscono, si tiri da F la retta FN. Di poi al punto M della MP si faccia l'angolo PMV uguale all'altro AMF, e la retta MV concorra colla FN in V al di sotto del punto N. Dovrà in tal caso descriversi un' ellisse co' fuochi F ed V, e coll' asse maggiore uguale ad FM+MV. E si dovrebbe descrivere co' fuochi F, ed V, e coll' asse principale quanto la MV—FN un' iperbole, se il punto V siane al di sopra del punto N. E finalmente, se la MD fosse parallela alla FN, dal punto M si abbassi la MK perpendicolare ad FN, e facciasi KB terza proporzionale dopo le rette Q, ed MK: sarà B il vertice principale della parabola da descriversi, BN il suo asse, e Q il parametro di esso. E tali cose son chiare dalle proprietà di queste curve.

PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA.

fig. 90. §. 339. *Se da' fuochi* F, *ed* V *delle iperboli opposte* MBR, Aa *si abbassino le* FL, *ed* VD *perpendicolari ad una tangente* DP *dell' una curva, o dell' altra; il rettangolo di queste perpendicolari sarà sempre uguale al quadrato del semiasse conjugato* CR.

E 'l rettangolo de' romi FM, *ed* MV *tirati al contatto* M *serberà al quadrato della normale* MN *la costante ragione dell' asse principale al parametro di esso.*

Dim. Part. I. Essendo il quadrato di CF uguale al rettangolo NCP, saran pure uguali le differenze di questi spazj e del quadrato di CP, che son dinotate da'

rettangoli VPF, NPC. Onde dovrà esser PV : PC :: PN : PF. Cioè VD : CQ :: NM : FL, per la similitudine de' triangoli PVD, PCQ, e degli altri PFL, PNM. E sarà finalmente il rettangolo di VD in FL uguale all' altro di CQ in MN, cioè al quadrato di CR.

La Parte II. di questa Prop. si dimostra, come quella dell' Ellisse, prop. 28: e la dimostrazione, che ho qui addotta per la Parte I. dell' iperbole, si può anche adattare all' ellisse.

PROPOSIZIONE XLII.

TEOREMA.

§. 340. *Nell' iperbole* LAR *il ramo* FR *è quanto la semiordinata condotta all' asse pel suo estremo* R, *e distesa insino alla tangente, che procede dal punto di sublimità verso lo stesso ramo. Cioè a dire la* FR *è uguale alla* PN. fig. 91.

E lo stesso ramo FR *sta alla perpendicolare* RG, *che dal suo estremo si cala sulla* DG *linea di sublimità di essa curva, come n' è l'eccentricità* CF *al semiasse* AC.

La dimostrazione di questo Teorema è indentica a quella dell' Ellisse, prop. 9 Lib. II.: e nel riandarla si riscontri la fig. citata.

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA.

fig. 80. §. 341. *Se agli estremi de' rami* FR, FK *dell' iperbole* RQ *conducansi le tangenti* RT, KT; *la retta* FT, *che unisce il fuoco* F *col concorso* T *di queste tangenti, dee divider per metà l'angolo* RFK *compreso da' medesimi rami.*

La dimostrazione di questo teorema è la stessa di quella della prop. 23. della parabola.

§. 342. *Corol.* Nell' iperbole si possono anche dedurre, come si è fatto nella parabola è nell' ellisse, le verità seguenti *Cioè:* I. *Se agli estremi di una corda condotta per un fuoco dell' iperbole si tirino a questa curva due tangenti, il concorso loro ne sarà allogato nella linea di sublimità.* II. *E ad essa corda dovrà esser perpendicolare la retta, che unisce il detto fuoco col concorso delle mentovate tangenti.*

§. 343. *Defin.* XII. Allorchè una curva vien toccata da un cerchio nella concava sua parte, e quivi si ritrovi avere la medesima di lui curvatura; cotesta specie di contatto si dirà *osculazione*, e 'l detto cerchio si chiamerà *cerchio osculatore.*

fig. 92. §. 344. Immaginatevi, che ad un qualunque punto A di una curva conica CDA siasi condotta la normale indefinita AR, e che nella detta normale siansi presi quanti punti si vogliano R, K, G, *ec.* Sarà chiaro dover esser tangenti della curva in A tutti que' cerchi, che si descriverebbero co' centri R, K, G, *ec.*, e co' rispettivi intervalli RA, KA, GA, *ec.* Or alcuni di questi infiniti cerchi deggion cadere al di sotto della

proposta curva (*), ed alcuni altri al di sopra. E ve ne sarà uno tra essi, che qual limite degl' interiori e degli esterni dovrà avere un suo archetto quasi combaciante con un elemento della curva, e quindi della medesima di lei curvatura nel luogo A.

§. 345. *Coroll.* Supponendo, che la proposta curva e l suo cerchio osculatore vi abbiano un elemento di comune, le normali erette alla curva da' termini di questo archetto dovran convenire nel centro del detto cerchio osculatore. Cioè a dire, supposto che AD sia cotesto comune elemento, le normali AK, e DH erette alla curva CDA da' suoi estremi A e D dovran convenire in un punto R, che ne sarà il centro del cerchio osculatore.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

§. 346. *Sia* CDA *una qualunque curva conica; il cubo della normale* AK *sarà uguale al parallelepipedo, che ha per base il quadrato del semiparametro principale, e per altezza il raggio* AR *del cerchio osculatore.* fig. 92.

Dim. Premessa la precedente definizione e 'l suo rischiaramento, dal fuoco F di una tal curva condu-

---

(*) Affinchè questo principio abbia luogo in una curva data, conviene che in essa l' angolo del contatto non sia infinitamente maggiore, nè infinitamente minore dell' angolo del contatto circolare; come saggiamente fu avvertito dal sommo Newton. Scol. Lem. XI. Princ. Matemat. Filos. Natur.

cansi le rette FA ed FD agli estremi dell'anzidetto elemento AD. Ed abbassata la FP perpendicolare alla tangente della curva in A, si calino da' punti D ed H le DT ed HG perpendicolari alle FA ed RA respettivamente. Sarà chiaro dover essere AT la differeza de' rami FA ed FD: poichè l'archetto, che si descrive col centro F intervallo FD, deesi confondere colla DT. E così pure la GK dovrà disegnare la differenza delle RH ed RK.

Inoltre questa retta AT, per la 19. El.V., starà a KH, come FA ad FK: poichè si è detto nel §. 334. esserne il semiasse principale all'eccentricità, come FA ad FK, o come FD ad FH. Ma nella parabola più facilmente ciò si conchiude dall' esser le FA ed FD respettivamente uguali alle FK ed FH. Infatti, se
fig. 29. alle uguali QB e 2AF vi aggiugneremn la BF, dovrà risultarne QF uguale a BA con AF, cioè ad FR.

fig. 92. E poichè per la similitudine de' triangoli ATD, FAP sta AD : AT :: AF : AP, e si è qui sopra dimostrato esserne AT : KH :: FA : FK, sarà *ex aequo* AD : KH :: AF^2 : AP × FK. Inoltre per la somiglianza de' triangoli KHG, KBA sta KH : GH :: KB : BA :: FK : AP :: FK × AP : AP^2. Dunque sarà di nuovo per equalità ordinata AD : GH :: AF^2 : AP^2. Ma la prima di queste due ragioni è uguale a quella di AR ad RG, pe' triangoli simili ARD, GRH. E per la similitudine degli altri due AKL, AFP, la seconda delle dette ragioni è quanto quella di AK^2 a KL^2 (*). Dunque sa-

(*) Ne' triangoli rettangoli ALK, APF sono uguali gli angoli acuti KAL, AFP, perchè ciascuno di essi è complemento dello stesso angolo PAF.

rà AR : RG :: AK^2 : KL^2 : e convertendo dovrà essere AR : AK :: AK^2 : AL^2, cioè a dire sarà il cubo della normale AK uguale al solido, che ha per base il quadrato del semiparametro AL^2, e per altezza il raggio d'osculo AR. C.B.D. * 335.

§. 347. *Cor.* I. In ogni curva conica CDA il raggio di osculo AR sta alla corrispondente normale AK in duplicata ragione di essa normale al semiparametro principale AL. Onde abbassando dal punto L la LQ perpendicolare alla normale AK, starà RA : AK :: AK : AQ.

§. 348. *Cor.* II. Dal punto K si elevi la KM perpendicolare alla normale AK; incontrandone in M il ramo AF, e poi dal punto M si alzi ad AM la perpendicolare MR. *Sarà la retta* RA *il raggio d'osculo nel luogo* A *di tal curva.* Imperocchè per lo triangolo rettangolo AMR sta AR ad AK in duplicata ragione di AR ad AM, o della sua uguale di KA ad AL, pe' triangoli simili RAM, KAL. Dunque per lo Corollario precedente la CA dovrà esserne il raggio d'osculo.

§. 349. *Cor.* III. Se il punto C sia il vertice principale della parabola, o uno de' vertici principali dell'ellisse, o dell'iperbole, la normale, che vi corrisponde dee pareggiare il semiparametro principale, come l'è chiaro dal §. 243. E quindi in forza di questo teorema *il raggio d'osculo in quel punto dovrà uguagliare il detto semiparametro principale.*

§. 350. *Scol.* I raggi de' cerchi osculatori di una data curva servono a determinarvi le diverse di lei curvature: e da' centri de' cerchi viensi a formare (*a*)

(*) Qui si è serbata una frase de' Geometri moderni; ma volen-

una nuova curva, detta dall' Ugenio *Evoluta*: poichè dall' evoluzione di questa curva, o dallo sviluppo di un filo flessibile adattato alla sua convessità, quella può intendersi generata. Del che si ragiona nella Geometria Sublime.



---

do parlare col rigore degli antichi dovrà dirsi, *che i centri de' cerchi osculatori di una curva sieno allogati nell' Evoluta di essa*.

CAP. VI.

Delle Dimensioni dell' Iperbole

PROPOSIZIONE XLV.

TEOREMA.

§. 351. *Se le ascisse* CA , CB , CD *dell' iperbole* GFE *rapportata agli assintoti* CD, CL *sieno continuamente proporzionali, e loro conducansi le ordinate* AE BF , DG ; *il quadrilineo iperbolico* ABFE, *che ne tolgano le due prime ordinate* AE *e* BF, *sarà quanto quell' altro* BDGF , *che ne vien troncato dalla seconda ordinata* BF *e dalla terza* DG. fig. 93.

E se dal centro C *di quest' iperbole agli estremi delle dette ordinate si tirino le rette* CE , CF, CG; *anche saranno tra se uguali, ed a que' quadrilinei, i due settori iperbolici* CEF , CFG.

Dim. Part. I. Prendansi delle rette AB e BD le due aliquote simili A*a*, B*b*, e vi si compiano i parallelogrammi AE*ea*, BF*fb*, che dovranno essere tra se uguali. Poichè essendo per supposizione CA : CB :: CB : CD, sarà per la 19. Elem. V, CA : CB :: BA. BD. Ma la prima di queste due ragioni per la natura di una tal iperbole è uguale a quella di BF ad AE*, ed alla seconda di esse si è fatta uguale l'altra di A*a* a B*b* : dunque sarà pure BF : AE :: A*a* : B*b*, e quindi il parallelogrammo AE*ea* sarà uguale al suo equiangolo BF*fb*. * 297.

Inoltre essendo per le anzidette cose CA : CB :: *Aa* : *Bb*, sarà per la 12. Elem. V. *Ca* : *Cb* :: *Aa* : *Bb*. Onde, se prendansi le *am*, *br* respettivamente uguali alle *Aa*, *Bb*, e vi si compiano i parallelogrammi *camn* e *dbrt*, sarà benanche *am* a *br*, come *Ca* a *Cb*, o come *bd* ad *ac*; quindi il parallelogrammo *camn* dovrà uguagliarne l'altro *dbrt*. Nella stessa maniera può dimostrarsi, che gli altri parallelogrammi circoscritti all' aja iperbolica EABF sieno uguali a' corrispondenti, che sarebber circoscritti nell' altra FBDG. Dunque per lo Lem. I. dovranno esser tra se uguali le due aje EABF, FBDG.

Part. II. Il triangolo CEA è poi uguale all' altro
CFB, perciocchè essi son metà de' parallelogrammi ugua-
li, che si compirebbero dalle CA ed AE, e dalle CB
* 272. e BF*. Dunque togliendo da que' triangoli l altro CAO
che loro è di comune, dovrà rimanervi il triangolo CEO
uguale al trapezio AOFB. Inoltre a questi spazj ugua-
li aggiungasi il triangolo mistilineo EOF, ne risulterà
il settore iperbolico ECF uguale al quadrilineo adja-
cente EABF. E potendosi dimostrare nello stesso mo-
do, che l' altro settore FCG sia uguale al quadrilineo
iperbolico FBDG, sarà vero ciò che ho proposto nel
teorema. C.B.D.

fig. 94. §. 352. *Corol.* I. Se le ascisse CA, CB, CD, CE, CF, ec. della detta iperbole tra gli assiototi sieno continuamente proporzionali; i quadrilinei iperbolici GABH, HBDI, IDEK, KEFL, ec. saranno uguali. E gli altri quadrilinei GABH, GADI, GAEK, GAFL, ec. dovranno essere come i numeri naturali, 1, 2, 3, 4, ec.

§. 353. *Corol.* II. Dunque gli spazj iperbolici GABH, GADI, GAFK, GAFL, ec. saranno logaritmi delle ascisse CB, CD, CE, CF, ec., o delle

quantità delle ragioni di CB a CA, di CD a CA, di CE a CA, di CF a CA, ec. (*).

§. 354. *Corol.* III. E potendosi continuare all'infinito la serie delle ascisse CA, CB, CD, CE, CF, ec. continuamente proporzionali; infiniti uguali trapezj GABH, HBDI, IDEKL, KEFL, etc., dovran contenersi nello spazio assintotico AFXLG. *Dunque lo spazio assintotico* AFXLG, *che nella Prop. si è dimostrato di una infinita lunghezza, qui vedesi aver benanche un' aja infinita.*

§. 355 *Coroll.* IV. *Dato il quadrilineo iperbolico* EKLF *facilmente può farglisi un altro uguale, che poggi sull' ordinata* AG *della stessa iperbole.* Infatti presa l'ascissa CB quarta proporzionale in ordine alle tre date ascisse CE, CL, CA, ed ordinata in detta curva per lo punto B la BH; sarà il quadrilineo iperbolico GABH uguale al dato KEFL: lo che può dimostrarsi, come la Iª. Parte della presente dimostrazione.

(*) Se si prenda una serie di grandezze geometricamente proporzionali, e di rincontro ad essa si ponga un' altra serie di altrettante grandezze equidifferenti; ogni termine di questa suol dirsi *logaritmo* del suo corrispondente termine di quella. Ma eccone su questo argomento un' idea più distinta recataci dall' Analisi Sublime. La grandezza a dinoti un numero maggiore dell' unità, x sia una grandezza variabile, ed y n' esprima il valore dell' esponenziale a^x; la x si dirà logaritmo della y, o della sua equivalente a^x.

PROPOSIZIONE XLVI.

PROBLEMA.

fig. 95. §. 356. ***Data un' iperbole parilatera, ed in essa un quadrilineo iperbolico; determinarvi la ragione, che serba il detto quadrilineo al rettangolo delle sottoposte coordinate.***

Soluz. Per lo rettangolo delle cordinate può prendersi la potenza della data iperbole GHM*, cioè il rettangolo delle coordinate uguali CA, AM, ciascuna delle quali esprimasi per l'unità. Ed a quel dato quadrilineo iperbolico può supporsi uguale, per l'ultimo Cor. prop. prec., il quadrilineo DAMG, che poggi nell' ordinata AM. Ciò posto, prendasi l'ascissa CB media proporzionale tra le due date ascisse CD, CA. Sarà il quadrilineo iperbolico DAMG uguale a 2BAMH*. E prendendo la CE media proporzionale tra le CB e CA, sarà pure BAMH uguale a 2BAMI, e quindi DAMG uguale a $2^2 \times$EAMI. Similmente, se tolgasi la CF media proporzionale tra le CE e CA, si vedrà esserne DAMG uguale a $2^3 \times$FAMK. E così più oltre procedendo si potrà conchiudere per una chiara induzione, che se l'ascissa C*a* dinoti l'ultima di coteste medie proporzionali prese un numero *n* di volte, debba esserne quel quadrilineo iperbolico DAMG uguale a $2^n \times$ A*am*M. Or da queste cose potremo prossimamente valutare l'anzidetto quadrilineo nel seguente agevol modo.

* 269

* 351.

Pongasi l'ascissa CD uguale ad *h*; sarà CB $= \sqrt{h}$; imperocchè per construzione è CB^2 uguale a CA$\times$CD $= 1 \times h$. E se per *k* esprimasi questa radice di *h*,

sarà $CE = \sqrt{k}$, essendo per construzione CE^2 uguale a $CA \times CB$. Sioilmente, se dinoteremo per l la radice di k, si vedrà chr sia $CF = \sqrt{l}$, per esserne CF^2 uguale a $CA \times CE$. Ed in fine, se dal numero h estraggasi la radice quadrata pel numero n di volte seguitamente, e tal radice esprimasi prr la r, sarà Ca uguale ad r, $Aa = Ca - CA = r - 1$, $Aa \times AM = r - 1$, ed $Aa \times am = \left(\frac{r-1}{r}\right)$ (*). Ed essendosi dimostrato esserne il quadrilineo DAMG uguale a $2^n \times AamM$, ei dovrà esser medio tra qurste due aritmeticbe espressioni $2n(r-1)$, e $2n\left(\frac{r-1}{r}\right)$ e ne sarà limite di esse, che dovranno tanto più appressarglisi, quanto il numero n stane più graode.

§. 357. *Coroll.* I quadrilinei iperbolici DAMG, BAMH, EAMI, FAMK, *ec.* sooo nella ragione de' srguenti numeri 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$, *ec.* e quiodi geometricamente proporzionali al par di questi.

§. 358. *Scol.* Con qursto mrtodo dr' limiti, ch' è alquanto analogo a quello, che fu praticato dal Sommo Archimede per la dimension del cerchio, avrebbesi potuto quadrar l' iperbole, ed assai prima, chr si fossero scoverti i logaritmi. E sebbene a' dì nostri, per mezzo di serie convergentissime si quadrino le iperboli, e si rinvrngano i log-mi de' numeri, pure a rigor di scirnza dovrebbesi estimar l' errore, che ne risulta da' termioi omessi, come saggiamrnte l'ha avvertito il Signor Lagrange. La qual cosa essendo di uoa malagevole indagine, il metodo da me proposto io questo

(*) Essendo qualunqne ordinata di questa curva uguale alla potenza divisa per la sua ascissa (§. 269.).

Problema parmi più esatto di quello, che si esegue colla somma di serie convergenti.

PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA.

Fig. 96. §. 359. *Sia* GMS *una qualunque iperbole parilatera rapportata agli assintoti* CD, CT, *che abbia* P *per potenza, ed ovunque le si conducano le due ordinate* DG, AM; *il quadrilineo* ADGM, *che queste ne troncan da quella, sarà uguale alla potenza* P *moltiplicata pe 'l logaritmo iperbolico della ragione dell' ordinata* AM *all' altra* DG.

Dim. Sia CE l' unità assunta nel precedente calcolo, e compitovi il quadrato CF intendasi descritta l'altra iperbole FLQ, che passi per lo punto F, ed a que' medesimi assintoti si rapporti. Di poi si prenda CH quarta proporzionale in ordine alle tre rette CA, CD, CE; si ordini la HK nell' iperbole FLQ, e sulla retta *Aa*, ch' è una qualunque aliquota di AD, si compiano i parallelogrammi *Am*, *Aq*. Saranno questi come le loro basi AM, AQ, cioè come il rettangolo
§. 269. MAC all' altro QAC, cioè come P ad 1². E ciò sempre dimostrandosi, sarà per lo Lemm. I., e per la 12. El. V. l' aja ADGM all' altra ADLQ, come P ad 1. Ma è poi l' aja ADLQ uguale all' altra EHKF, per esserne CE : CH :: CA : CD (*); e 'l detto quadrilineo è il logaritmo iperbolico della ragione di CH a

---

(*) Lo che può dimostrarsi, come la prop. 45.

CE, cioè di quella di CD a CA, o di AM a DG. Dunque sarà vero il proposto assunto. C. B. D.

PROPOSIZIONE XLVIII.

TEOREMA.

§. 360. *Sia* DBC *un' iperbole parilatera, e la* DC *una qualunque ordinata all' asse principale* AR; *il segmento iperbolico* DBC, *che questa retta ne tronca da quella curva, mancherà dal rettangolo della semiordinata* DR *nella sua ascissa* AR, *per quanto n' è il quadrato del semiasse principale* AB *moltiplicato pel logaritmo della ragione della somma di esse coordinate* AR, RD *al detto semiasse.* Fig. 97.

Dim. Gli assintoti della proposta iperbole sieno le rette Q*s*, e P*g*: le altre due rette AB, AL dinotino i suoi semiassi conjugati: e poi da' punti B, e D conducansi le rette BS, DF parallele all'assintoto AP.

Ciò premesso, i quattro triangoli ABS, PGF, AGE, A*g*E son rettangoli ed isosceli, come l'è chiaro per essere semiretto l'angolo BAS*. Dunque la D*g*, * 259.
ch' è uguale alle due DE ed E*g*, cioè alle due DE ed EA, sarà uguale alla somma delle due coordinate AR ed RD. Ed essendo il rettangolo *g*DG uguale* ad * 255.
AB*, e quindi D*g* : AB :: AB : DG, sarà pure AR+RD ad AB, come AB a DG, o come BS a DF, pe' triangoli simili ABS, DGF. E 'l quadrilineo iperbolico SFDB, o il suo uguale settore ADB*, sarà uguale alla potenza * 351.
P moltiplicata pe'l logaritmo della ragione di AR+RD ad AB*. Dunque il trilineo iperbolico BDR, ch' è dif- * 359.
ferenza del triangolo rettilineo ADR, e del settore iperbolico ADB, sarà uguale alla metà del rettangolo di

AR in RD, meno la potenza di tal iperbole moltiplicata per lo logaritmo della ragione di AR+RD ad AB. Oude prendeudo i loro doppj, si vedrà che il segmento iperbolico DBC debba mancare dal rettangolo delle coordinate AR ed RD, per la doppia potenza di essa iperbole, cioè per lo quadrato del semiasse AB moltiplicato pel logaritmo della ragioue di AR + RD ad AB. C. B. D.

§. 361. *Coroll.* I. Per la similitudine de' triangoli AEG, GFD essendo AG : GE :: GD : GF, * sarà il rettangolo AGF uguale all' altro EGD, e quindi 2AGF=2EGD. Sicchè unendo ad essi respettivamente gli uguali spazj AG^2, e $2EG^2$, ne verrà $AF^2—FG^2$

* 4. uguale a $2DEG^2$, o $AF^2—FD^2$ uguale a 2ARD.

* 6. II.

§. 362. *Coroll.* II. Cioè *nell' iperbole parilatera il rettangolo delle coordinate all' asse* (ove il centro siane il principio delle ascisse) *è suddupla della semidifferenza de' quadrati delle corrispondenti coordinate agli assintoti di essa curva.*

§. 363. *Coroll.* III. Il quadrilineo iperbolico ABDE sarà poi uguale al triangolo ARD aggiuntavi la potenza dell' iperbole moltiplicata pel logaritmo iperbolico della ragione di AR + RD ad AB.

PROPOSIZIONE XLIX.

TEOREMA.

§. 364. *Poste le medesime cose del Teorema precedente, se il trilineo iperbolico* DBR *si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo semiasse principale* CB; *la conoide, che vi si genera, sarà la differenza del cono retto rettangolo, che tien per asse l' ascissa* CR *computata dal centro, e del cilindro che ha per base il circolo del semiasse* CB, *e per altezza la medesima ascissa diminuita di due terzi del detto semiasse.* *fig.* 98.

Dimostr. Sia CA la surregolatrice della proposta iperbole, e la semiordinata DR la incontri in A. Sarà il quadrato di DR uguale alla differenza de' quadrati di CR e di CB, o alla differenza de' quadrati di RA e di RQ: essendo a cagion dell' iperbole parilatera DBR la CB uguale alla BP, o alla RQ, e quindi ancora la CR uguale alla RA. Dunque anche il circolo del raggio DR pareggerà la differenza de' circoli de' raggi RA ed RQ. Intanto l'ascissa RB dell' iperbole BDR si divida nelle particelle uguali R*r*, *rt*, ec., qualunque sia il numero e la magnitudine di esse: e compiti i rettangoli R*rd*D, R*ra*A, ec. s' intendan questi rivolgersi intorno a BR insieme coll' iperbole proposta; saranno i cilindri de' rettangoli R*rd*D, R*ra*A, R*rq*Q come i circoli de' raggi DR, RA, RQ. Dunque il cilindro di R*rd*D sarà ugualo alla differenza de' cilindri di R*ra*A, e di R*rq*Q; come il circolo di RD si è qui sopra mostrato pareggiar la differenza de' circoli di RA e di RQ. E dimostrando il medesimo as-

sunto nelle altre parti dell' ascissa RB, sarà per lo Lemma I. la conoide iperbolica generata dall' iperbole BDR uguale alla differenza del frusticono e del cilindro generati respettivamente dal trapezio BRAP, e dal rettangolo BRQP, rivolti intorno alla BR, cioè al solido anulare, che in tal rivoluzione descrivesi dal triangolo PQA.

Ciò posto, si prenda la BV terza parte del semiasse BC: e la retta VN, che conducesi parallela alla RQ, si prolunghi insin, che incontri la QP in N, e poi si faccia rivolgere il rettangolo BVNP intorno ad VR. Questo dovrà generare un cilindro uguale al cono di
12.XII. CBP: e quindi aggiungendo a questi solidi il cilindro generatovi dal sottoposto rettangolo BRQP, sarà il cilindro, che vi genera l'intero rettangolo VRQN, uguale al solido, che vi forma il trapezio CRQP rivolto intorno a CR. Onde saranno uguali le differenze di ciascuno di questi due solidi dal cono, che vi genera il triangolo isoscele rettangolo CRA nel volgersi intorno al suo cateto CR. Ma la seconda di queste due differenze è uguale al solido annulare generatovi dal triangolo PQA: ed un tal solido si è dimostrato uguale alla conoide proposta. Dunque alla medesima conoide dovrà essere uguale la seconda delle dette differenze. C.B.D.

PROPOSIZIONE L.

TEOREMA.

§. 365. *Se intorno al medesimo asse* QR *sieno descritte le due iperboli* RD *ed* RB, *le quali abbiano per assi conjugati le rette* MN *ed* FO; *i due trilinei iperbolici* RDA *ed* RBA, *ciascuno de' quali è contenuto dalla medesima ascissa* RA, *dalla corrispondente semiordinata, e dall' arco, saranno fra loro come i detti assi conjugati.* fig. 99.

E in duplicata ragione degli assi conjugati saranno le conoidi, che i medesimi trilinei avranno a descrivere rivolgendosi intorno alla comune ascissa RA.

Dim. Part. I. L'ascissa RA si concepisca divisa nelle particelle uguali AG, G*g*, ec., qualunque sia il numero di queste; e pe' punti delle divisioni G, *g*, ec. s' intendano condotte altrettante semiordinate ad amendue le iperboli. Si vedrà immantinente, che per la natura dell' iperbole RD debba essere $AD^2 : QAR :: MN^2 : QR^2$: e che per quella dell' altra iperbole RB siavi benanche $QAR : AB^2 :: QR^2 : FO^2$. Dunque sarà *ex aequo* $AD^2 : AB^2 :: MN^2 : FO^2$; e quindi AD : AB :: MN : FO. Or compiti i parallelogrammi AGKD, AGIB, le loro aje, che sono come AD ad AB, debbono esser benanche come MN ad FO. E, distendendo una tal dimostrazione co' principj del Lemma I., come in simili congiunture si è più volte praticato, s'intenderà agevolmente, che i trilinei iperbolici RDA ed RBA sien fra loro, come le rette MN ed FO, che vi dinotano gli assi conjugati delle proposte iperboli.

Part. II. E poichè i cilindri generati in tal

rivoluzione da' rettangoli AGKD, AGIB, per avere la comune altezza AG, sono in duplicata ragione de' raggi AD ed AB delle loro basi; essi saran pure in duplicata ragione delle MN ed FO, che sono gli assi conjugati delle dette iperboli. E continuando questo ragionamento con tal guida, e coll'anzidetto motodo de' limiti, dovrà concludersi, che le conoidi generate da' trilinei iperbolici RDA, RBA nel volgersi, ch' essi fanno intorno ad RA, sieno in duplicata ragione degli assi conjugati MN, ed FO, C. B. D.

PROPOSIZIONE LI.

PROBLEMA.

fig. 100. §. 366. *L' iperbole ABQ si rivolga con perfetta rivoluzione intorno al suo asse Aa; vuol determinarsi la superficie della conoide, che n' è generata.*

I. Dividasi l' asse Aa dell' iperbole ne' punti G, ed H, sicchè tanto OG, che OH sia terza proporzionale in ordine all' eccentricità OF di essa curva, ed al semiasse principale AO. II. Dipoi s' intenda descritta l' altra iperbole GIK, che abbia per asse principale la retta GH, e per asse conjugato quello, che alla data iperbole si appartiene. III. Finalmente dal punto A si elevi alla retta Aa la perpendicolare AI. Dico essere *la ricercata superficie quarta proporzionale in ordine al raggio di un cerchio alla sua periferia, ed allo spazio iperbolico* AIKQ.

La dimostrazione di questo problema è l' istessa di quella della prop. 54. dell' Ellisse.

PROPOSIZIONE LII.

PROBLEMA.

§ 367. *Ritrovare la superficie della sferoide schiacciata, la quale si generi dalla perfetta rivoluzione della semiellisse* DAB *intorno al suo asse minore* BD, *che l' è di base.* fig. 101.

I. Dal fuoco f di una tal curva ad uno degli estremi D di quell'asse minore si meni il ramo fD, cui si elevi la perpendicolare DZ, che ne incontra l' asse maggiore in un punto Z. II. Si tagli Eb uguale ad EZ, e co' semiassi conjugati EA ed Eb s' intendano descritte le iperboli opposte AG e CF. III. Si tiri per B la GF parallela ad AC, e si compia il rettangolo GLRF. Dico esser *la richiesta superficie quarta proporzionale in ordine al raggio di un circolo alla sua periferia, ed allo spazio iperbolico* GACF.

Dim. Essendo per la natura dell' iperbole esterna AGBE*, $BG^2 : AE^2 :: BE^2 + bE^2 : bE^2$; sarà pure * 286.
$BG^2 : AE^2 :: DZ^2 : EZ^2 :: fD^2 : DE^2$, pe' triangoli simili DEZ, fED. E quindi per essere AE^2 uguale ad* fD^2, dovrà essere $BG^2 : AE^2 :: AE^2 : ED^2$, e * 183.
BC : AE :: AE : ED. Dunque la BG, o la sua uguale BF sarà il semiparametro dell'asse minore BD nella detta ellisse*: e la retta FE, che vi si congiunge, sarà * 139.
il luogo delle sunnormali di cotesta curva: cioe, se per lo punto M si distenda la MT parallela alla AC, e si tiri la normale MN, sarà sempre QN uguale a QT.

Di più essendo EA^2 uguale ad EI^2 con CIA^*; ed * 5. II.
En^2 uguale ad EA^2 con CnA^*; sarà lo stesso En^2 uguale ad EI^2 colla somma de' rettangoli CIA, CnA. E * 6. II.

quindi togliendosi d'ambe le parti EP^2 sarà la differenza di En^2, e di EP^2, cioè il rettangolo gln (compitosi il parallelogrammo $nOlg$) uguale alla somma de' rettangoli CIA, CnA.

Ciò premesso, per la similitudine de' triangoli EBF, EQT sta $BF^2 : QT^2 :: BE^2 : QE^2$. Ma i quadrati di BE e di QE come uguali a quelli di GL e di On sono, per la natura dell' iperbole AOG, come i rettangoli CLA, CnA; e gli stessi quadrati di BE, e di QE, o di MI sono, per la natura dell'ellisse ABCD, come AE^2 ad AIC. Dunque per la 12. El. V. dovrà esser $BF^2 : QT^2 :: CLA + AE^2 : CnA + AIC :: EL^2 : gln$. Ma è poi BF^2 uguale ad EL^2, come l'è chiaro. Dunque sarà pure QT^2 uguale a gln, cioè, prendendo i loro uguali, sarà QN^2 uguale a tMO. Ed aggiungendovi di comune QM^2, ne risulterà MN^2 uguale a QO^2, ed MN uguale a QO; e quindi il quadrilineo AGBE sarà la scala delle normali del quadrante ellittico ABE. Ma nel Lemma III. si è dimostrato esser la superficie di uno di cotesti solidi alla scala AGBE delle normali nella figura generatrice di esso, come la circonferenza di un cerchio al raggio. Dunque sarà il raggio d'un cerchio alla sua periferia, come il quadrilineo iperbolico AGBE alla superficie della metà della detta sferoide, o come GACF all'intera di lei superficie. C.B.D.

§. 368. *Scol.* Il luogo delle sunnormali in tutte e
* 243. tre le curve coniche non è, che una retta*. Quello delle normali della parabola l'è un' altra parabola del
* 104. medesimo parametro principale*. Il luogo delle normali di un' ellisse l'è un' altra ellisse più schiacciata, o un' iperbole, secondochè quelle si rapportino all'asse mag-
* 215, e 366. giore, o al minore di tal curva*. E finalmente le normali di un'iperbole, che si riferisca all'asse principale,
* 368. hanno una nuova iperbole per la loro locale*.

PROPOSIZIONE LIII.

TEOREMA.

§. 369. *Se nell' iperbole parilatera* NSX *rapportata agli assintoti* CA, CD, *si tiri ovunque un' ordinata* NB: *e poi lo spazio assintotico infinitamente lungo* BXN, *cui quella retta n' è di base, intendasi rivolto intorno all' assintoto* CA *con perfetta rivoluzione; il solido, che vi si genera, sarà uguale al cilindro generatovi dal rettangolo delle sottoposte coordinate* NB, *e* BC. fig. 101.

Dim. Si conducano in una tal curva rapportata all' assintoto CD le due ordinate SR ed *sr*, e poi si compiano i rettangoli CDNB, RS*tr*, RQ*ur*. Saranno i due anelli cilindrici generati da' rettangoli RS*tr*, RP*pr* colla mentovata rivoluzione, come le loro altezze SR, PR: imperocchè essi han per comune base l' armilla circolare generatavi dalla R*r*. Ma SR sta a PR, o ad ND, come CD a CR, ovvero, pe' triangoli simili CDN e CRQ, come ND a QR. Ed è poi la ND, o la sua uguale PR, alla RQ, come il rettangolo RP*pr* all' altro RQ*ur*. Dunque saranno i riferiti anelli cilindrici di RS*tr* e di RP*pr*, come i rettangoli RP*pr* ed RQ*ur*. E quindi pe' Lemmi I, e II. il solido assintotico CBXND starà al cilindro generatovi dal rettangolo BCDN coll' anzidetta rivoluzione, come il rettangolo BCDN al triangolo NCD, cioè come 2 ad 1. E 'l solido acuto infinitamente lungo, che ne vien generato dallo spazio assintotico BXN in tal rivolgimento, dovrà essere uguale al sottoposto cilindro, che vi genera il rettangolo delle coordinate BC, e BN. C. B. D.

PROPOSIZIONE LIV.

TEOREMA.

Fig. 113. §. 370. *Se dal vertice principale* A *della parabola* NAP *si prenda un qualunque arco* AN, *e dal suo estremo* N *conducansi la normale* NR, *e la* NM *semiordinata all' asse* AR; *il rettangolo del parametro principale* AB, *e dell' arco* AN *sarà uguale al rettangolo della detta semiordinata* NM *nella corrispondente normale* NR *una col quadrato della metà di quel parametro multiplicato pel logaritmo della ragione della semiordinata accresciuta della normale, al semiparametro.*

Dim. L' asse AR della parabola NAP si prolunghi in sul vertice, sinchè la CA sia uguale alla metà della BA, parametro principale di essa curva. E poi col centro C, e col semiasse AC descrivasi l' iperbole parilatera AE. Sarà la sunnormale MR nella parabola A*n*N uguale alla metà del parametro AB, e con ciò uguale al semiasse AC dell' iperbole parilatera AE. E sarà pure il quadrato di MR uguale a quello di AC. Intanto per la natura della medesima iperbole l' è anche il rettangolo FDA uguale a DE^2 o ad MN^2. Sicchè la somma del rettangolo FDA e del quadrato di AC sarà uguale alla somma de' quadrati di MN, e di MR, cioè a dire sarà CD^2 uguale ad NR^2; e quindi CD, o la sua uguale GE sarà uguale alla normale RN.

Ciò premesso, se intendasi condotta la corda NA, che poi intorno ad N, e verso E si aggiri circolarmente; ci sarà chiaro, che nell' ultimo sito di questa retta, prima ch' ella si distenda sulla tangente di tal

curva nel punto N, la sua parte interiore debba confondersi coll' archetto Nn, che ne tronca. Dunque in tal caso il triangoletto Nno sarà simile all'altro NMR; e quindi per la somiglianza di essi triangoli, essendo Nn : No :: NR : RM, il rettangolo di RM in Nn dovrà uguagliare l' altro di oN in NR, cioè di Er in EG. E dimostrando nella stessa guisa, che ogni altro rettangolo fatto dalla sunnormale della parabola in ogni altro archetto di questa curva sempre pareggi il corrispondente rettangoletto circoscritto nel quadrilineo iperbolico ACGE; sarà forza che il rettangolo della sunnormale MR nell'intero arco parabolico AN adegui il quadrilineo iperbolico ACGE, ove terminano que' rettangoletti. Ma cotesto quadrilineo iperbolico è uguale alla metà del rettangolo delle coordinate CG, GE aggiuntavi la potenza di tal iperbole moltiplicata pel logaritmo iperbolico della ragione di CG+GE ad AC*. * 363.
Dunque, prendendo le grandezze uguali alle già dette, sarà il rattangolo dell' arco parabolico AN nel semiasse AC della detta iperbole uguale alla metà del rettangolo di NM in NR colla metà del quadrato di CA moltiplicata pel logaritmo della ragione di NM + NR ad MR. E prendendone i dupli sarà il rettangolo dell' arco parabolico AN nel parametro AB uguale al rettangolo di NM in NR aggiuntovi il quadrato di MR moltiplicato pel logaritmo di NM+NR ad MR.C.B.D.

§ 371. *Coroll.* 1. Ad un qualunque diametro RC fig. 105.
della già detta iperbole MAF conducansi ovunque le due ordinate DL ed MF: e pe'loro estremi le parallele all' asse principale di essa curva, cioè le LI MK, DB, EF: incontrandone l'asse secondario ne' punti I, K, B, E, e l'anzidetta parabola VAG ne' punti V, T, S, e G. Saranno i due rettangoli di CA in TV, e di CA in GS respettivamente uguali a'quadrilinei iper-

bolici MνLIK ed FrDBE (*). E la differenza di quelli dovrà la differenza di questi pareggiare.

§. 372. *Coroll.* II. Intanto i quadrilinei iperbolici MνLPQ, ed FrDPQ col metodo de' limiti più volte adoperato rilevansi uguali: e son pure uguali i trapezj MLPQ, FDPQ: lo che può ricavarsi dalla Prop. 38. El. I. congiungendovi le MP, ed FP. Dunque saran benanche uguali i segmenti iperbolici MνL, FrD, che ne restano in toglendo da que' quadrilinei i respettivi trapezj.

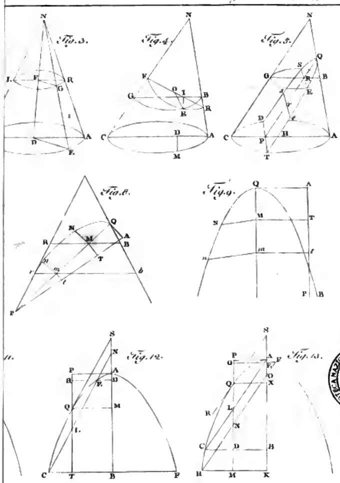
§. 373. *Coroll.* III. E quindi la differenza de' trapezj MLIK ed FDBE, ch'è quanto quellla de' quadrilinei iperbolici MνLIK ed FrDBE, sarà uguale al rettangolo di AC nella differenza degli archi parabolici TV, e GS. Onde riducendo la differenza di que' due trapezj al rettangolo di AC nella retta X *sarà la differenza degli archi parabolici* TV, *e* GS *uguale alla retta* X. E questo l'è un elegantissimo paradosso di Geometria, che suggella (**) questi miei Elementi sulle Curve Coniche geometricamente congegnati.

(*) Essendo per la presente Propos. i quadrilinei iperbolici MKCA, ed LICA respettivamente uguali a' rettangoli di AT in AC, ed AV in AC. Onde la differenza di quelli, cioè il quadrilineo MνLIK, sarà quanto il rettangolo di AC in TV.

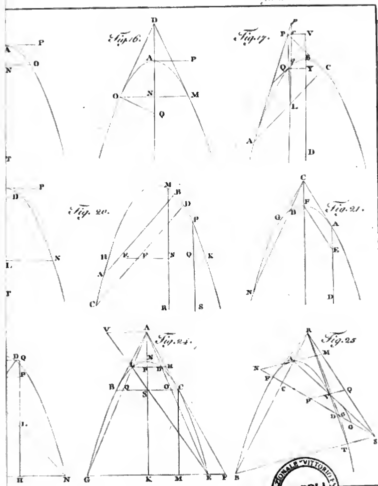
(**) Si legga il Trattato Analitico sulle Curve Coniche pag. 291.

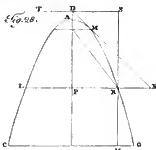
FINE.

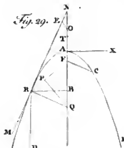


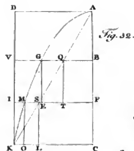

Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 12.
Fig. 13.




Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 24.
Fig. 25


Fig. 28.


Fig. 29.


Fig. 32.

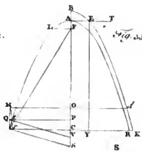
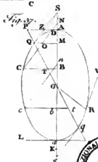

Fig. 33


Fig. 36.


Fig. 37.

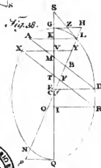

Fig. 38.

Fig. 41.

Fig. 42.

Fig. 43.

Fig. 46.

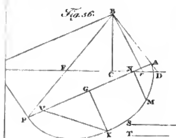
Fig. 47.

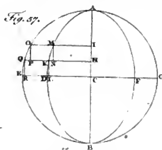
Fig. 48.

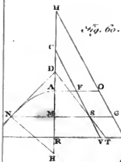
Fig. 51.

Fig. 52.

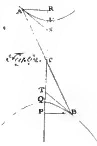
Fig. 53.

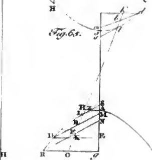

Fig. 56.

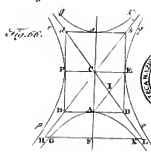

Fig. 57.


Fig. 60.

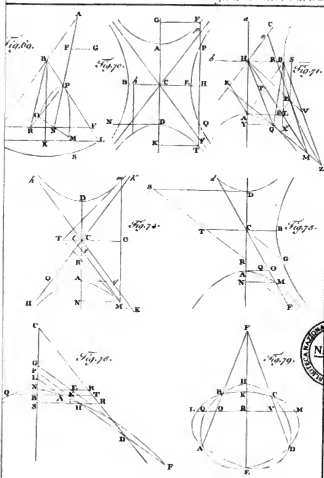





Fig. 65.


Fig. 66.




Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 78.
Fig. 79.



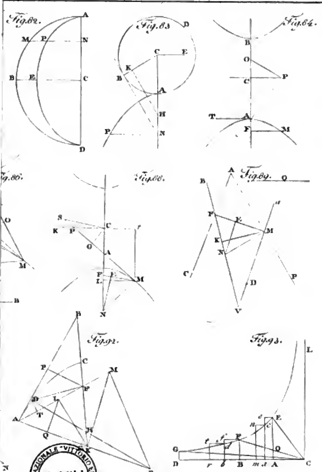
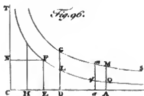
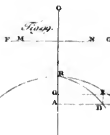
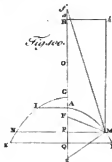

Fig. 82.
Fig. 83
Fig. 84.
Fig. 86.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 91.
Fig. 93.

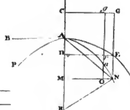


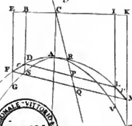

Fig. 95.


Fig. 96.


Fig. 99.


Fig. 100.


Fig. 103.


Fig. 104.





